

tanulmányok

75/1978

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATO INTÉZETE

ANYAGSZÉTVÁLASZTÁSI RENDSZEREK TERVEZÉSÉNEK ÉS OPTIMÁLIS ÜZEMEL-
TETÉSÉNEK ÁLTALÁNOS MEGKÖZELITÉSE

Irta:

VASKÖVI ISTVÁN - GALBÁVY MÁRTA

Tanulmányok 75/1978.

A kiadásért felelős:

DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 058 0

ISSN 0324-2951

TARTALOMJEGYZÉK

Összefoglalás	5
I. A FELADAT MEGFOGALMAZÁSA	9
1.§. Az irányítás problémája anyagszétválasztási folyamatokban	9
2.§. A szétválasztó elem, kaszkád és rendszer fogalma és leírása	12
3.§. A két szétválasztó elemből álló alapkapcso- lások fogalma	16
4.§. A feladat megfogalmazása	22
II. A MEGENGEDETT SZÉTVÁLASZTÁSI RENDSZEREK GENERÁLÁSA.....	24
1.§. Az anyagszétválasztási rendszer leírása gráf formájában és a megengedettségi feltételek meghatározása	24
2.§. Algoritmus megengedett szétválasztási rendsze- reket leíró indexezett irányított gráfok generálására	27
3.§. A megengedett szétválasztási rendszer generálására szolgáló algoritmus számítógépes realizációja	45
III. ANYAGSZÉTVÁLASZTÁSI RENDSZEREK HATÁRGÖRBÉJÉNEK MEGHATÁROZÁSA	58
1.§. A feladat megfogalmazása és a megoldási módszer kiválasztása	58
2.§. Módszerek az anyagszétválasztási rendszerek határgörbéjének kiszámítási feladatához szükséges célfüggvény és határfeltételek meghatározására	66
3.§. A határgörbék meghatározására szolgáló módszer számítógépes realizációja. A feladat sajátosságai	76
4.§. A szétválasztási rendszerek határgörbéjének meghatározási feladata, mint geometriai programo- zási feladat	86
5.§. Egyszerűsített módszer alapkapcsolások kompozíció- jával előállítható szétválasztási rendszerek határ- görbéjének meghatározására	93

6.§. A kompozíciós rendszerek határgörbéjének meghatározására szolgáló egyszerűsített módszer számítógépes relizációja	119
7.§. A szétválasztási rendszer optimális üzemmódjának meghatározása	130
IV. AZ EREDMÉNYEK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI A GYAKORLATBAN ...	136
IRODALOMJEGYZÉK	141

ANYAGSZÉTVÁLASZTÁSI RENDSZEREK TERVEZÉSÉNEK ÉS OPTIMÁLIS ÜZEMELTETÉSÉNEK ÁLTALÁNOS MEGKÖZELÍTÉSE

Vaskövi István, Galbavy Márta

Összefoglalás

A dolgozatban kétkomponensű elegyek szétválasztásával foglalkozunk olyan anyagszétválasztási rendszerek segítségével, amelyek nagyszámu azonos típusu szerkezeti egységből állnak. Általános módszert adunk ilyen rendszerek számítógéppel segített tervezésére és optimális irányítására. E kettős feladat egységes megközelítése érdekében az anyagszétválasztási folyamat irányítását kétszintes hierarchikus rendszer formájában oldottuk meg. A tervezés során kiválasztjuk az anyagkihozatal szerinti legjobb szétválasztási rendszert. A feladatot nemizomorf irányított gráfok generálására vezettük vissza. A legjobb rendszer kiválasztása érdekében felhasználtuk a rendszerek határgörbéjének fogalmát. Meghatározásukat nemlineáris programozási feladatként irtuk fel és oldottuk meg. A generáláskor kapott rendszerek számának csökkentése érdekében bevezettük egy fontos rendszer osztály - az alapkapcsolásokból kompozícióval képezhető rendszerek fogalmát. Algoritmust dolgoztunk ki e rendszerosztályba tartozó rendszerek generálására és határgörbéik meghatározására. Bemutattuk, hogy a rendszer optimális üzemeltetése a felvett optimalizálási kritériumoknak megfelelően a rendszer és a rendszert alkotó szerkezeti egységek határgörbéin meghatározott munkapontban valósítható meg. A kitűzött feladatok megoldásaként számítógépes algoritmust adtunk a legjobb anyagszétválasztási rendszer kiválasztására és optimális üzemmódjának meghatározására különböző optimalizálási kritériumok szerint. A kidolgozott algoritmusok alapján elkészítettük a GRAPH és COMPO programokat.

ОБЩИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАЗДЕЛИТЕЛЬНЫМИ
СХЕМАМИ.

Иштван Вашкеви, Марта Гальбави

Краткое содержание

В работе рассматривается разделение двухкомпонентных смесей с помощью разделительных схем, состоящих из большого числа однотипных разделительных элементов. Приводится универсальный метод для автоматизации проектирования и оптимального управления такими системами. Для единого подхода к решению обеих задач управление разделительными процессами рассматривалось в виде двухуровневой иерархической системы. В процессе проектирования выбирается схема, являющаяся наилучшей по извлечению компонентов в выходные продукты. Эта задача была сведена к задаче генерирования неизоморфных ориентированных графов. Для выбора наилучшей схемы было использовано понятие предельной разделительной характеристики схемы. Задача определения предельной характеристики схемы была решена в виде задачи нелинейного программирования. Для снижения числа полученных генерированием схем было введено понятие важного класса схем — схем-композиций из основных схем соединения. Были разработаны алгоритмы для генерирования и определения предельной характеристики схем, принадлежащих этому классу схем. В работе показывается, что оптимальный по выбранному критерию оптимизации режим работы схемы определяется рабочей точкой, лежащей на предельной характеристике схемы и точками на характеристиках входящих в схему элементов, соответствующими рабочей точке всей схемы. В качестве решения поставленных задач даются алгоритмы для ЦВМ, служащие для выбора наилучшей разделительной схемы и для определения ее оптимального режима работы по различным критериям оптимизации. Разработанные алгоритмы получили программную реализацию в виде программ GRAPH и COMPO.

A GENERAL APPROACH TO THE COMPUTER AIDED DESIGN /CAD/ AND OPTIMAL OPERATION OF SEPARATING CIRCUITS.

István Vaskövi, Márta Galbavy

Summary

This paper considers the separation of two component mixtures with the help of separating circuits consisting of a great number of construction units of the same type. A general method is given for the CAD and optimal control of such systems. For the sake of the uniform approach to this double task the control of the separating process was achieved in the form of a two-level hierarchical system. In the course of the CAD the best separating system of the stock recovery will be selected. The task was reduced to the generating of non-isomorphic directed graphs. In order to select the best system the concept of the separating characteristics of the systems was used. Their definition was stated and performed as a nonlinear programming task. In order to reduce the number of the systems obtained by generating the concept of an important system class, that of the systems which can be formed by composition from the basic circuits was introduced. An algorithm was elaborated for generating the systems belonging to this system class and determining of their separating characteristics. We have shown that the optimal operation of the system can be achieved in the operating point determined in the separating characteristics of the system and the separating units constructing the system. As a solution of the problems stated we have worked out an algorithm to select the best separating circuit and to determine its optimal mode of operation according to various optimization criteria. On the basis of the algorithms worked out we have written the GRAPH and COMPO programs.

I. A FELADAT MEGFOGALMAZÁSA

1.§. Az irányítás problémája anyagszétválasztási folyamatokban

Irányítástechnikai szempontból az anyagszétválasztási folyamatok bonyolult, többparaméteres objektumok. A szétválasztási folyamatok irányítási rendszereit az irányított paraméterek és az egyes alrendszerek közötti keresztkapcsolatok nagy száma jellemzi. A szétválasztási folyamatok automatikus irányításának megvalósítására kidolgozott módszerek két nagy csoportba oszthatók:

- a folyamatot egészében, bonyolult többparaméteres rendszerként kezelő módszerekre;
- a folyamatot dekompozícióval alrendszerekre felbontható és hierarchikus strukturaként kezelő módszerekre.

Az első csoportot alkotó módszerek a folyamatot vagy "black box" formájában, vagy a folyamat egyes paraméterei között kapcsolatot teremtő egyenletrendszer formájában írják le.

A folyamat "black box"-ként való kezelése esetén az irányítás a be- és kimenő jelek szerint történik. Ebben az esetben nagy nehézségek merülnek fel elsősorban a folyamatok lassu lefolyása (a folyamatok nagy tehetetlensége), másodsorban az irányított paraméterek nagy száma miatt [21].

A folyamatnak egyenletrendszer formájában való leírása esetén az egyenletek különböző módszerekkel határozhatók meg. A folyamat matematikai modellje például felírható teljes információs játék megoldásaként [9], bár jelentős egyszerűsítések esetén is bonyolult a megoldás. A leggyakoribb megoldást a folyamat kísérleti vizsgálati módszerei adják a mérési információk statisztikai feldolgozásával. Ezek a passzív és aktív kísérleti módszerek. A passzív kísérleti módszerek közül a leggyakrabban a regresszió analízist használják fel a rendszerparaméterek közötti kapcsolatot leíró egyenletek

meghatározására [3,30,31]. A paraméterek nagy száma és bonyolult kölcsönhatásaik miatt olyan nemlineáris regressziós-egyenlet felírása, amelyben szerepel minden jelentős paraméter, gyakorlatilag megvalósíthatatlan [4]. Bizonyos esetekben a regressziós egyenlet jelentéktelenebb tagjainak fokozatos kizárásával olyan modell állítható elő, amelyben a korrelációs tényező eléri a 0,7-0,8 értéket [33]. A másik gyakran alkalmazott passzív kísérleti módszer a folyamat paraméterek közötti kapcsolat leírására a korreláció analízis [3,27]. Mind a regresszió, mind pedig a korreláció analízis nagymennyiségű statisztikai adat összegyűjtését és hosszadalmas, munkaigényes feldolgozását teszi szükségessé. Az ily módon előállítható egyenletek aránylag kis pontosságúak [25]. Az egyenletek meghatározására felhasználhatók aktív kísérlettervezési módszerek is [32,37]. Segítségükkel pontosabb kapcsolat határozható meg az egyenletek paraméterei között. Alkalmazásuk ipari körülmények között nehézségekbe ütközik, mivel az egyik legfontosabb követelmény szinte megvalósíthatatlan - az összes bemenő jel rögzítése adott szinteken. A kísérlettervezési módszerek közül evolúciós kísérlettervezéssel a kívánt eredmény csak néhány ciklus után érhető el, amíg egyenletek pontossága nem haladja meg a korreláció analízissel kapott egyenletek pontosságát [25]. A felsorolt módszerek segítségével előállított folyamat modellek az egyenletek együtthatóinak állandó korrekcióját igénylik, mivel jelen esetben változó együtthatóju egyenletekkel van dolgunk.

Technológiai folyamatok automatizált irányítási rendszereinek létrehozásakor leggyakrabban (ahogy a mi eseteünkben is) a folyamat valamely kritérium szerinti optimális üzemeltetését kell biztosítani. Anyagáramok elosztására visszavezethető folyamatok matematikai modellezését és optimális irányításának módszereit jól rendszerezi a [14] munka. A technológiai folyamatok optimális irányítási feladatának megoldásakor gyakran merül fel a Bellman által "méretek átká"-nak nevezett probléma. A folyamatot egészében, többparaméteres objektumként vizsgálva ilyen esetben az optimalizálási feladat megoldásakor fel kell használni az objektum bizonyos sajátosságait [29].

A fentiekből következik, hogy az anyagszétválasztási folyamatokat egészében, bonyolult többparaméteres rendszerként vizsgálva nagy nehézségek merülnek fel az optimális irányítási feladat megoldása során.

Az anyagszétválasztási folyamatok automatizált irányítási feladatának másik megoldását, amint azt említettük, a bonyolult többparaméteres rendszer több egyszerűbb alrendszerre való felbontása adja, amikor a bonyolult rendszert hierarchikus strukturaként kezeljük. Bonyolult kémiai-technológiai folyamatok automatikus irányításának kérdései pontosan ily módon kerültek megoldásra az [1,6,15,17,18,19,20,34] munkákban. Az anyagszétválasztási folyamatok sajátosságainak felhasználásával a [41] munka nagyon hatékony módszert ad a bonyolult irányítási rendszer dekompozíciójára, mely eltér az [1,6,15,17,18,19,20,34] munkákban javasolt módszerektől. Jelen dolgozat a [18] munka folytatása, ezért a [18]-hoz hasonlóan az anyagszétválasztási folyamat irányítási rendszerét két-szintes hierarchikus rendszerként határozzuk meg. A felső hierarchikus szinten az egész rendszer irányítását vizsgáljuk, amíg az alsó szinten a rendszer dekompozíciójával kapott alrendszerek irányítását oldjuk meg. Az egyes alrendszerek irányítását lokális irányítási rendszerek biztosítják az alrendszerek lokális céljainak (hatékonysági kritériumainak) megfelelően. Az egyes alrendszerek lokális céljait a felső hierarchikus szinten határozzuk meg az egész rendszer céljának megfelelően. Nagyon fontos a célok helyes megválasztása, mely megkönnyíti a felső és alsó hierarchikus szint céljainak egyeztetését (a koordinációs stratégia megválasztását). A [41] munkához hasonlóan célként az elegyek szétválasztási hatékonyságának vektor kritériumát választjuk, ahol a vektor elemei az elegykomponensek kihozatalának teljességét jellemzik a végtermékekbe. A hatékonysági vektor kritérium megfelelő elemei az egész rendszer és az egyes alrendszerek esetében azonos fizikai értelemmel bírnak, amely biztosítja a célok kovarianciáját.

A bonyolult objektum dekompozíciójával lényegesen egyszerűsödik az irányítás feladata az alsó hierarchikus szinten. Az egyes alrendszerek lokális irányítási rendszereinek biztosítaniuk kell az alrendszereknek olyan munkapontban való üzemeltetését, amelyet a felső hierarchikus szinten határoztunk meg az egész anyagszétválasztási folyamat adott kritérium szerint optimális üzemmódjának megfelelően.

2.§ A szétválasztó elem, kaszkád és rendszer fogalma és leírása

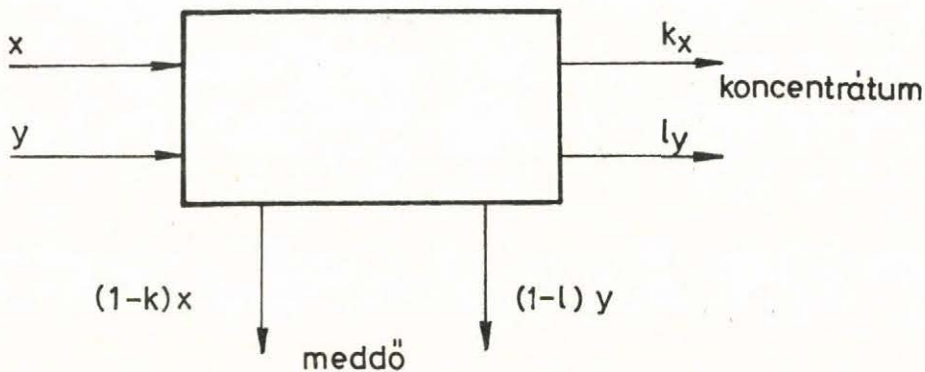
A továbbiakban kétkomponensű elegyek szétválasztásával fogunk foglalkozni. Az elegyben a komponensek mennyisége legyen x és y . Kétkomponensű elegy szétválasztásának nevezzük azt a folyamatot, amelyben a belépő anyagáram két áramra bomlik, az egyik, az ún. koncentrátum, az egyik komponensben dúsított, ez a komponens legyen az x , megfelelően amásik áram, az ún. meddő, az y komponensben dúsított. Az x és y komponensek teljes szétválasztása a gyakorlatban nehezen valósítható meg és nagy ráfordításokat igényel.

Meghatározás: szétválasztó elemnek nevezzük az anyagszétválasztási berendezés olyan szerkezeti egységét, amelyben a belépő anyagáram két áramra bomlik fel a koncentrátumra és a meddőre.

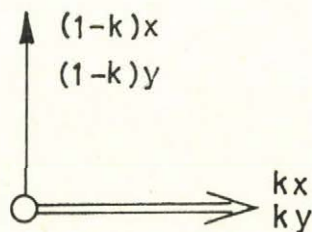
Általában egy szétválasztható elemmel nem biztosítható a szétválasztás kívánt foka, ezért néhány szétválasztó elemet kapcsolnak össze ún. szétválasztási rendszerre. A szétválasztási rendszer részét, amely két vagy annál több szétválasztó elemből áll, kaszkádnak nevezzük. A rendszert alkotó szétválasztó elemek száma a nyersanyagtól függően széles skálán mozoghat - néhány elemtől (szén dúsítása), néhány ezer elemig (urán dúsítás). Olyan anyagszétválasztási rendszerekkel fogunk foglalkozni, amelyek több azonos típusú szétválasztó elemből állnak. A szétválasztó elemek különbözőképpen kapcsolhatók össze rendszerre, ezáltal létrehozható a lehetséges szétválasztási rendszerek halmaza. Egy adott szétválasztó

tási rendszert a benne szereplő szétválasztó elemek jellemzői, száma és összekapcsolási módja határoz meg.

A szétválasztó elem, kaszkád és rendszer mennyiségi leírása céljából felhasználtuk a szétválasztási görbe, vagy határgörbe fogalmát. Tegyük fel, hogy egy szétválasztó elemben, kaszkádban vagy rendszerben az (x, y) komponensekből álló belépő áram két áramra bomlik fel: a (k_x, l_y) komponensű koncentrátumra és az $((1-k)x, (1-l)y)$ komponensű meddőre (1. ábra)



szimbolikusan



1. ábra.

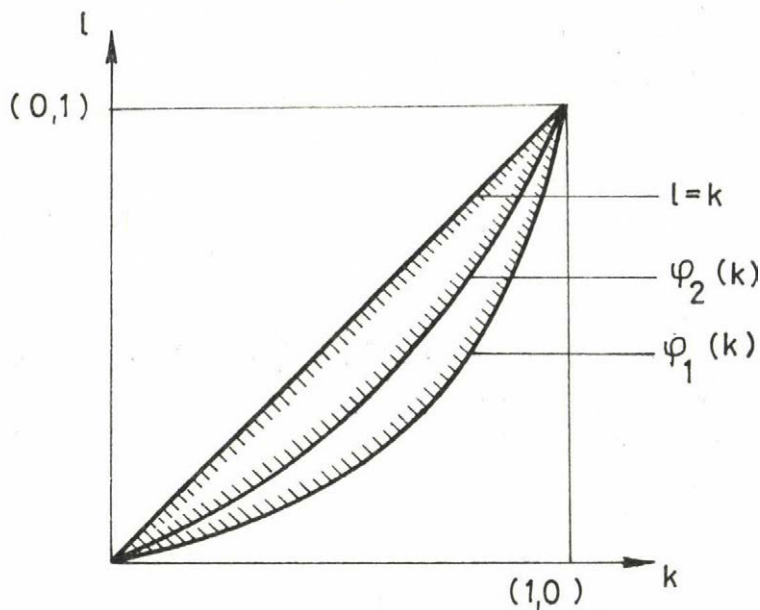
Fizikailag a k és l paraméterek az x és y komponenseknek a koncentrációba történő kihozatalát jelentik (mennyiségi arányát). Az $l=k$ egyenlőség teljesülése a dusulás hiányát jelenti. A koncentrációban az x komponens dusulása az y komponenshez képest a $k>l$ egyenlőtlenség teljesülésekor jön létre. $k=1$, $l=0$ teljesülésekor az x és y komponensek teljes szétválása következik be. A gyakorlatban teljes szétválasztás nem valósítható meg, ezért a szétválasztó elem, kaszkád és rendszer dusítási képességének határát az ún. határgörbe felhasználásával adjuk meg.

Meghatározás: határgörbének nevezzük a komponensek x és y mennyiségétől független $l = \phi(k)$ görbét (2. ábra), amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1.) $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$;
- 2.) Minden $k \in [0,1]$ -re $\phi(k) \in [0,1]$ folytonos, monoton növekvő, konvex görbe, azaz

$$\frac{d\phi(k)}{dk} = \phi'(k) \geq 0 \quad 1.1$$

$$\phi'(k^{(2)})(k^{(2)} - k^{(1)}) \geq \phi(k^{(2)}) - \phi(k^{(1)}) \quad 1.2$$



2. ábra.

A $\phi(k)$ határgörbe és a $\ell=k$ egyenes által bezárt tartományt megengedett tartománynak nevezzük.

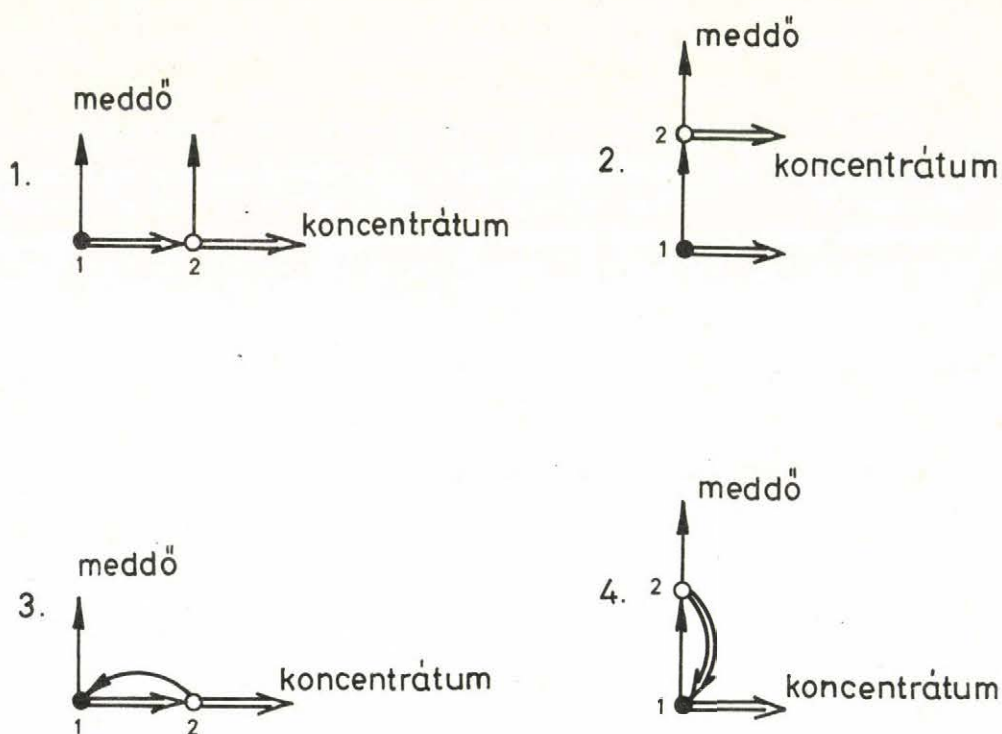
Bevezetjük a jobb határgörbe fogalmát:

- 1.) a $\phi_1(k)$ határgörbe jobb a $\phi_2(k)$ határgörbénél k változási intervallumában, ha teljesül $\phi_1(k) < \phi_2(k)$ $k \in (0,1)$ -re;
- 2.) ha $\phi_1(k) < \phi_2(k)$ $k \in (0, k^{(1)})$ -re és $\phi_1(k) > \phi_2(k)$ $k \in (k^{(1)}, 1)$ -re oly módon, hogy $\phi_1(k^{(1)}) = \phi_2(k^{(1)})$, akkor a $(0, k^{(1)})$ intervallumban a $\phi_1(k)$ a jobb, a $(k^{(1)}, 1)$ intervallumban pedig a $\phi_2(k)$.

A felvett határgörbe segítségével elvégezhető egy szétválasztható elem, kaszkád, vagy rendszer mennyiségi meghatározása és figyelembe vehető az x komponens koncentrátumba való kihozatalának növelése, a koncentrátum minőségének javítása és az időegység alatt előállított koncentrátum mennyiségének fokozása közötti ellentét. A koncentrátum minősége nem más, mint az x komponens százalékos aránya a koncentrátumban.

3.§. A két szétválasztó elemből álló alapkapcsolások fogalma

A fentiekben megállapításra került, hogy egy szétválasztó elemmel nem biztosítható a kívánt dúsítási fok, ezért szétválasztási rendszereket hoznak létre szétválasztó elemek összekapcsolásával. Elemi rendszerek hozhatók létre két elem összekapcsolásával. A [41] munkához hasonlóan mi is felhasználjuk a két elem összekapcsolásával kapott elemi rendszerek, az un. alapkapcsolások fogalmát. Alapkapcsolásként 4 elemi rendszert veszünk fel (3. ábra)



3. ábra.

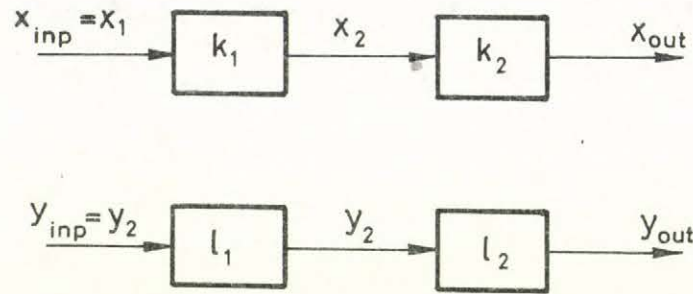
Besatirozással jelöljük az alapkapcsolás bemenetét, vagyis az anyagáram bevezetésének helyét. Az 1. és 2. alapkapcsolásokat párhuzamos kimenetű alapkapcsolásoknak, a 3. és 4. alapkapcsolásokat recirkulációs alapkapcsolásoknak nevezzük. Az 1. és 3. alapkapcsolásokat primál kapcsolásoknak, a 2. és 4. alapkapcsolásokat az 1. és 3-nak megfelelő duál kapcsolásoknak nevezzük, mivel ezek a primál kapcsolásokból állithatók elő az anyagáramok felcserélésével.

A felvett alapkapcsolások felírására a következő szimbólikus jelölést vezettük be: 1. - $(1 \Rightarrow 2)$, 2. - $(1 \rightarrow 2)$, 3. - $(1 \Leftarrow 2)$, 4. - $(1 \leftarrow 2)$.

Meghatározás: kompozíciós rendszereknek nevezzük azokat a rendszereket, amelyek alapkapcsolások kompozíciójával állíthatók elő, vagyis n szétválasztó elem esetén $n-1$ pár zárójel és a 4 műveleti jel $\Rightarrow, \rightarrow, \Leftarrow, \leftarrow$ felhasználásával.

Határozzuk meg az alapkapcsolások k -ját és ℓ -jét az x és y komponensek kihozatalát a koncentrátumba, ha adottak az elemek $k_i, \ell_i, i=1,2$ kihozatalai. Ennek érdekében ábrázoljuk az alapkapcsolásokat a koncentrátum kimenetre vonatkozóan a szabályozástechnikában bevezetett módon külön az x és y komponensekre. Az x komponens esetén a tagok átviteli függvényei a koncentrátum áramnak, vagy meddő áramnak megfelelően k_i vagy $1-k_i$, az y komponens esetén ℓ_i vagy $1-\ell_i$.

Ábrázoljuk a leírt módon az 1. alapkapcsolást (4.ábra).



4. ábra.

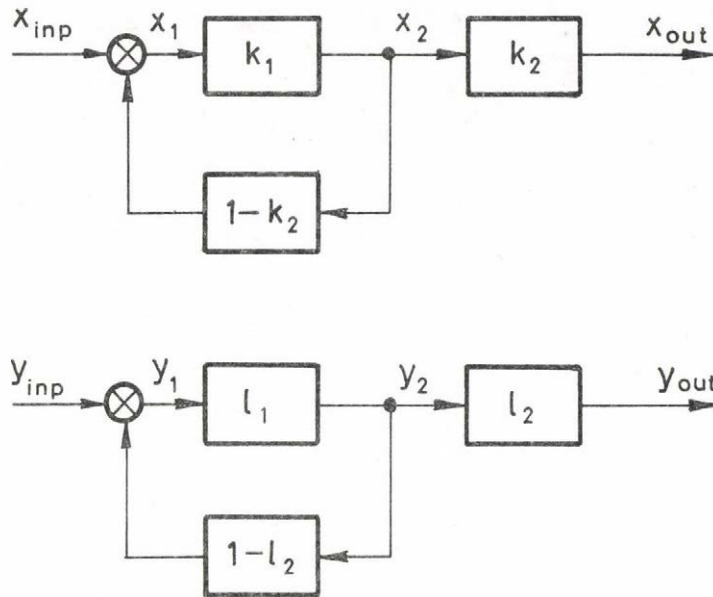
Az 1. alapkapcsolás k és ℓ kihozatalait a következőképpen határozzuk meg:

$$k = \frac{x_{ki}}{x_{be}} = k_1 k_2, \quad \ell = \frac{y_{ki}}{y_{be}} = \ell_1 \ell_2 \quad 1.3$$

A 2. alapkapcsolás k és ℓ kihozatalát a következő állítás felhasználásával határozhatjuk meg: a duál kapcsolás kihozatalai a primál kapcsolás kihozatalaihoz hasonlóan határozhatók meg úgy, hogy k és ℓ helyett $(1-k)$ -t és $(1-\ell)$ -et, k_i és ℓ_i , $i=1,2$ helyett pedig $(1-k_i)$ -t és $(1-\ell_i)$ -t helyettesítünk be, tehát

$$1-k = (1-k_1)(1-k_2), \quad 1-\ell = (1-\ell_1)(1-\ell_2) \quad 1.4$$

A 3. alapkapcsolás k és ℓ kihozatalainak meghatározása az 5. ábra felhasználásával történik.



5. ábra.

$$k = \frac{x_{ki}}{y_{be}} = \frac{k_1 k_2}{1 - k_1 (1 - k_2)} , \quad \ell = \frac{y_{ki}}{y_{be}} = \frac{\ell_1 \ell_2}{1 - \ell_1 (1 - \ell_2)} \quad 1.5$$

A 4. alapkapsolás k és ℓ kihozatalait a 2. alapkapsoláshoz hasonlóan a duál kapcsolásokra vonatkozó állítás felhasználásával határozzuk meg:

$$1-k = \frac{(1-k_1)(1-k_2)}{1-(1-k_1)k_2} , \quad 1-\ell = \frac{(1-\ell_1)(1-\ell_2)}{1-(1-\ell_1)\ell_2} \quad 1.6$$

Meghatározás: a $k = f(k_1, \dots, k_n)$, $\ell = f(\ell_1, \dots, \ell_n)$ egyenleteket, melyek kapcsolatot teremtenek az n szétválasztó elemből álló rendszer határgörbéjének és a rendszert alkotó elemek határgörbéinek koordinátái között, kapcsolati egyenleteknek nevezzük.

A kapcsolati egyenletek segítségével írjuk fel a felső és alsó hierarchikus szint közötti koordinációs stratégiát a kétszintes hierarchikus irányítási strukturában.

A kapcsolati egyenletek mellett a felvett alapkapcsolások másik fontos jellemzője az i -edik, $i=1,2$, elemen keresztül folyó cirkulációs áram mennyisége.

Meghatározás: az i -edik elemre vonatkozó cirkulációnak nevezzük a következő kifejezést

$$\frac{x_i}{x_{be}} + \frac{y_i}{y_{be}}$$

ahol

x_i, y_i - az x és y komponensek mennyisége az i -edik,
 $i=1, \dots, n$ elem bemenetén,

x_{be}, y_{be} - az x és y komponensek mennyisége a rendszer
bemenetén,

n - az elemek száma a rendszerben.

A cirkulációnak ez a meghatározása lényegesen megkönnyíti kiszámítását a [41]-ben javasolt meghatározáshoz képest és számítógépes algoritmus létrehozását teszi lehetővé (lásd a III. fejezetben). Ezenkívül, az alapkapcsolásokból kompozícióval előállított rendszerek esetén a cirkulációnak fenti meghatározása lehetővé teszi, hogy értékét függvénykompozícióként határozzuk meg (lásd a III. fejezetben).

A definíciónak megfelelően az 1. és 2. elemre vonatkozó cirkulációt 1. alapkapcsolás esetén a következőképpen határozzuk meg:

$$g_1 = \frac{x_1}{x_{be}} + \frac{y_1}{y_{be}} = 2$$

1.7

$$g_2 = \frac{x_2}{x_{be}} + \frac{y_2}{y_{be}} = k_1 + \ell_1$$

a 2. alapkapsolás 1. és 2. elemére vonatkozó cirkulációt a duál kapcsolásokra érvényes állítás felhasználásával határozhatjuk meg:

$$g_1 = \frac{x_1}{x_{be}} + \frac{y_1}{y_{be}} = 2$$

1.8

$$g_2 = \frac{x_2}{x_{be}} + \frac{y_2}{y_{be}} = (1-k_1) + (1-\ell_1)$$

a 3. alapkapsolás 1. és 2. elemére vonatkozó cirkuláció:

$$g_1 = \frac{x_1}{x_{be}} + \frac{y_1}{y_{be}} = \frac{1}{1-k_1(1-k_2)} + \frac{1}{1-\ell_1(1-\ell_2)}$$

1.9

$$g_2 = \frac{x_2}{x_{be}} + \frac{y_2}{y_{be}} = \frac{k_1}{1-k_1(1-k_2)} + \frac{\ell_1}{1-\ell_1(1-\ell_2)}$$

a 4. alapkapsolás 1. és 2. elemére vonatkozó cirkuláció a duál kapcsolásokra érvényes állítás felhasználásával:

$$g_1 = \frac{x_1}{x_{be}} + \frac{y_1}{y_{be}} = \frac{1}{1-(1-k_1)k_2} + \frac{1}{1-(1-\ell_1)\ell_2}$$

1.10

$$g_2 = \frac{x_2}{x_{be}} + \frac{y_2}{y_{be}} = \frac{1-k_1}{1-(1-k_1)k_2} + \frac{1-\ell_1}{1-(1-\ell_1)\ell_2}$$

Már a kapcsolati egyenlet és az i -edik elemre vonatkozó cirkuláció meghatározásakor e fogalmakat nemcsak az alapkapsolások esetére, hanem az $n \geq 2$ általános esetre definiáltuk. Az anyagszétválasztási folyamatok optimális irányításának további vizsgálatai során e fogalmak gyakran kerülnek felhasználásra.

4.§. A feladat megfogalmazása

Munkánk célja:

- 1.) Az összes, n elemből álló megengedett szétválasztási rendszer generálása és sorrend felállítása a generált megengedett rendszerek halmazán a legjobb rendszer kiválasztása céljából - ez a feladat számítógéppel segített tervezési feladat;
- 2.) A legjobb rendszer kiválasztása után e rendszer optimális üzemmódjának meghatározása a felvett kritérium - ez a feladat optimális irányítási feladat.

A feladat megfogalmazásakor egy új fogalom merült fel - a megengedett szétválasztási rendszer fogalma.

Meghatározás: megengedett szétválasztási rendszernek nevezzük azt a rendszert, amelyben tetszőleges elem felcserélése $l=k$ határgörbéjű elemmel nem eredményez jobb rendszert.

Az első feladat megoldásakor a megengedett szétválasztási rendszereket gráfok formájában ábrázoljuk és a megengedett rendszerek generálásának feladatát kétszinű irányított gráfok generálására vezetjük vissza. A generált megengedett rendszerek halmazán sorrendet a rendszerek határgörbéinek összehasonlításával állítunk föl.

A második feladat megoldása során a szétválasztási rendszer optimális munkapontját a rendszer határgörbájén határozzuk meg a kiválasztott optimalizálási kritériumnak megfelelően.

Meghatározás: az anyagszétválasztási rendszer határgörbájének nevezzük azt a görbét, amely megfelel a szétválasztási határgörbe meghatározásának és biztosítja az x komponens koncentrátumba való kihozatalának maximumát az y komponens koncentrátumba való kihozatalának a $(0,1)$ intervallumban felvett különböző rögzített értékeinél.

A megengedett szétválasztási rendszerek generálásával a II. fejezet foglalkozik. A III. fejezetben írjuk le a szétválasztási rendszerek határgörbéinek meghatározását, amelyeket a továbbiakban egyrészt a legjobb rendszer kiválasztására, másrészt a rendszer optimális munkapontjának meghatározására használunk fel.

II. A MEGENGEDETT SZÉTVÁLASZTÁSI RENDSZEREK GENERÁLÁSA

1.§. Az anyagszétválasztási rendszer leírása gráf formájában és a megengedettségi feltételek meghatározása

Az I. fejezetben meghatároztuk munkánk célját, amelynek értelmében feladatként tűztük ki a megengedett szétválasztási rendszerek generálását a legjobb rendszer kiválasztása érdekében. Az adott feladatot meghatározott indexezett irányított gráfok generálására vezetjük vissza [5,44,45].

A szétválasztási rendszerek egyértelműen leírhatók irányított kétszinű gráfok segítségével (6. ábra) [56].



6. ábra.

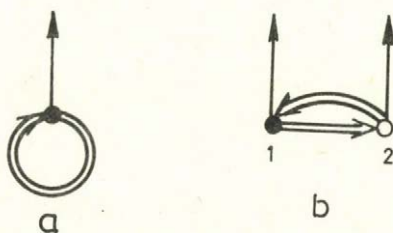
A 6. ábrán látható szétválasztási rendszer n szétválasztó elemet tartalmaz, melyeket az $1 \div 4$ indexekkel láttunk el. Az n elemből álló rendszer szétválasztó elemei felelnek meg a gráf csucsainak 1 -től n -ig tartó indexeléssel (a 6. ábrán $1 \div 4$). Az egyik gráfcsucs megkülönböztetett - ez a forrás (1), mivel megfelel a rendszer bemenetének. A rendszerből kilépő koncentrációs áram és meddő áram összegyűjtésére két további csucsot vezetünk be, - a koncentrációs áram számára az $n+1$ indexűt (5), a meddő áram számára pedig az

$n+2$ idnexüt (6) - melyeket nyelőknak nevezünk. A koncentrátum és a meddő áramokat kétszinű gráfélekkel jelöljük, melyek az áramok irányának megfelelően irányítottak. A koncentrátum áramokat piros színű gráfélekkel, a meddő áramokat kék színűvel jelöljük.

A gráf minden csucsából a nyelők kivételével egy-egy piros és kék él lép ki. A nyelőkbe csak belépnek élek, mégpedig az egyikbe csak piros, a másikba csak kék színűek.

A gyakorlatban előforduló anyagszétválasztási folyamatok számos sajátossággal rendelkeznek, amelyek meghatározott követelményeket támasztanak a gráf strukturájával szemben. E sajátosságok figyelembevételével létrehozott rendszerek a megengedett rendszerek. Ezeket a sajátosságokat figyelembe kell venni, amikor gráfokként kezeljük a rendszereket, vagyis e sajátosságokkal kell meghatározni a gráfok megengedettségét. A rendszerek megengedettségét a gráfok megengedettségére átvivő összefüggések szigorú bizonyítása helyett összefoglaljuk azokat a gyakorlati szempontokat, amelyeket figyelembe vesznek a szétválasztási rendszer kialakításakor, majd ezekből kiindulva meghatározzuk a gráf megengedettségi feltételeit.

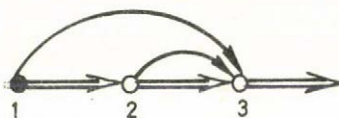
- 1.) Az anyagszétválasztási rendszerek kialakításakor figyelembe veszik, hogy sem a koncentrátum áramok, sem pedig meddő áramok nem tartalmazhatnak hurkokat (7.a ábra) vagy köröket (7.b ábra).



7. ábra.

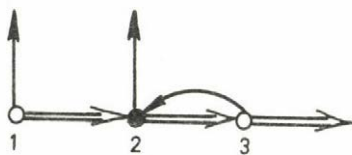
Ez azzal magyarázható, hogy hurok esetén az elemben nem történik meg egyik komponens dusulása sem, az elem csupán átengedi az elegyet ($k=1$ és $l=1$). Kör esetén a kört tartalmazó rendszer mindig rosszabb annál a rendszernél, amely a kör kiküszöbölésével keletkezik az áramok felcserélése által.

- 2.) Szétválasztási rendszer kialakításakor nem vezethető a meddő áram egy elem kimenetéről egy olyan elem bemenetére, amely az áramok láncán közelebb helyezkedik el a rendszer kimenetéhez, mivel ez a koncentrációs felhígulást eredményezi (8. ábra).



8. ábra.

- 3.) Egy szétválasztó elem csak akkor vesz részt a rendszer munkájában, ha kapcsolatban van a koncentrációs áramon vagy/és meddő áramon keresztül a forrással. A kapcsolat hiányára mutatunk be példát a 9. ábrán, ahol az 1. elem nem vesz részt a rendszer munkájában.



9. ábra.

A felsorolt sajátosságok határozzák meg a gyakorlatban a szétválasztási rendszerek kialakításának elveit. Fogalmazzuk meg ezeket az elveket a rendszereket leíró gráfokra.

Meghatározás: az anyagszétválasztási rendszert leíró gráfot megengedettnak nevezzük, ha

- 1.) az azonos színű élek által alkotott részgráfok gyökeres fák, ahol a gyökér a nyelő;
- 2.) tetszőleges két csucs között nincsenek különböző színű irányított utak;
- 3.) a forrás valamennyi csucssal kapcsolatban van.

Ilymódon a megengedett szétválasztási rendszerek generálása a fentiekben meghatározott megengedett gráfok generálásával oldható meg. Az $n+2$ csucst tartalmazó megengedett gráfok generálásával előállítható az n elemből álló összes megengedett szétválasztási rendszer.

2.§. Algoritmus megengedett szétválasztási rendszereket leíró indexezett irányított gráfok generálására

Csak az utóbbi időben kezdenek megjelenni különböző gráfok számítógépes generálására szolgáló módszerek. Általában, ezek a módszerek valamilyen kódolási eljárást használnak fel [22,53]. A továbbiakban leírásra kerülő algoritmus alapját a [11,12]-ben kidolgozott módszer képezi.

A kidolgozott módszer gyökeres fák generálásán alapul. A szétválasztási rendszereket leíró gráfok esetében ez a módszer felhasználható, mivel a megengedettség első feltétele szerint a megengedett gráf egy és ugyanazon csucshalmazra felépített két gyökeres fából áll. Az n elemből álló szétválasztási rendszert két különböző színű gyökeres fa írja le, melyeknek $n+1$ csucsa van.

A piros élek alkotják a piros fát, melynek gyökere a nyelő és élei a nyelő felé irányítottak, következésképpen a kék élekből épül fel a kék fa. A fák kódolására a csucsk indexét használjuk fel a nyelők indexének kivételével, amelyeket az $n+1$ és $n+2$ indexek helyett egységesen 0-val kódolunk.

Megjegyzés: A piros és kék fák generálásának hasonlóságát használjuk ki a gyökér 0-val való kódolásával, s ily módon külön kiemeljük a gyökeret. A fák egymásra illesztése után, amellyel előállítjuk a megengedett gráfot, a nyelőknek ismét $n+1$ és $n+2$ indexekkel látjuk el a meghatározásnak megfelelően.

A megengedett gráfok generálásának menete a következő: Először egy piros fát generálunk. A generáláskor a fa a gyökérből kiindulva épül fel az élek irányításával ellentétes irányban. Egy fa felépítésekor a nyelőtől kezdve egy él adott végpontjához meghatározzuk a kezdőpontot. A kezdőpontot a még fel nem használt csucsk közül választjuk ki. Szabad csucsk listájának nevezzük a fa felépítéséhez még fel nem használt csucsk listáját. A szabad csucsk listájából a kezdőpont kiválasztása a leszámlálási skála szerint történik. Leszámlálási skálának nevezzük az olyan skálát, amely pozícióinak száma egyenlő a szabad csucsk számával, elemei 0 és 1 értéket vehetnek fel a kettes számrendszer egymásutáni értékeinek megfelelően. i -es a skála i -edik pozícióján az i -edik listaelem kiválasztását jelenti kezdőpontként a szabad csucsk listájából. A fa felépített, ha a szabad csucsk listája üres. Egy fát, amelynek $n+1$ csucsa van az élei listájával ábrázoljuk a következő módon

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ \vdots \\ a_n b_n \end{pmatrix}$$

ahol

a_i - az i -edik él végpontjának kódja ,

b_i - az i -edik él kezdőpontjának kódja, ahol $i=1, \dots, n$.

A piros fa felépítése után építjük fel az erre a fára illeszthető összes kék fát. A megengedettség második feltétele szerint nem mindegyik kék fa illeszthető az adott piros fára. Az egymásra illesztés letiltását, amely a megengedettség második feltételéből következik tiltómátrix bevezetésével adjuk meg. P tiltómátrixnak nevezünk egy $n \times n$ -es mátrixot ($n+1$ csucsból álló fák esetén), melynek elemei

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{-ha a } j \text{ kezdőpontból engedélyezünk} \\ & \text{élet az } i \text{ végpontba.} \\ 0 & \text{-ha a } j \text{ kezdőpontból nem engedélyezünk} \\ & \text{élet az } i \text{ végponthoz.} \end{cases}$$

Jelöljük $P(i)$ -vel a P mátrix i -edik sorát. A tiltómátrix figyelembevételével generáljuk a piros fára illeszthető kék fákat. A kék fák felépítése a piros fák felépítésével azonos módon történik. Minden egyes kék fa felépítése után az a kiindulási piros fával párban egy gráfot határoz meg, amely kielégíti a megengedettség első két feltételét. Az így generált gráf csucsait 1-től n -ig egymás után ellenőrizzük, hogy lehetnek-e források. Ha a kiválasztott csucsból piros vagy kék élek mentén eljuthatunk az összes többi csucsba, akkor teljesül a megengedettség harmadik feltétele, s ez a csucs betöltheti a forrás szerepét. A gráf, az így kapott forrással, egy megengedett szétválasztási rendszernek felel meg. Az $n+2$ csucsból álló gráfnak, amelyet egy-egy piros és kék fa határoz meg, maximum n forrása lehet, de az is előfordulhat, hogy nincs forrása. Az adott gráfban minden új forrás új megengedett szétválasztási rendszert határoz meg. Az első gráf összes lehetséges forrásának meghatározása után felépítjük a következő kék fát a csucsok

leszámlálásának folytatásával a szabad csucok utolsó listájában (lásd a továbbiakban). A kék fák felépítése során bizonyos csucokból élekkibocsájtásának letiltása miatt un. zsákutcák jöhetnek létre. Ilyenkor mindaddig folytatjuk a leszámolásást a szabad csucok utolsó előtti listájában, amíg ki nem kerülünk a zsákutcából. Az összes kék fa s a hozzájuk tartozó források meghatározása után építjük fel a következő piros fát, a hozzá tartozó tiltómátrixot, majd az erre a piros fára illeszthető kék fákat. Ez a folyamat az utolsó pár piros és kék fa, valamint az általuk meghatározott gráf valamennyi forrásának előállításával ér véget.

Felmerülhet bizonyos piros fák letiltásának szükségessége. Ilyenkor meg kell határozni és előre meg kell adni a piros fákra vonatkozó tiltómátrixot is.

A generálási módszer e rövid leírásából következik, hogy a megengedett szétválasztási rendszerek generálását 5 szakaszban valósítjuk meg:

- 1.) a piros fákra vonatkozó tiltómátrix bevitele
(ha erre szükség van, vagyis ha le kell tiltani bizonyos piros fákat);
- 2.) a piros fák generálása;
- 3.) a felépített piros fa éleinek listája alapján az erre a piros fára illeszthető kék fákra vonatkozó tiltómátrix felépítése.
- 4.) a kék fák generálása tiltómátrixuk figyelembevételével;
- 5.) a lehetséges források meghatározása.

Vizsgáljuk meg a generálási algoritmust lépésenként.

- 1.) Általában valamennyi piros fa generálása engedélyezett. Ilyenkor a P tiltómátrix a következő alakú

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \neq j \\ 0 & \text{ha } i = j \end{cases}$$

Bizonyos piros fák letiltására akkor kerül sor, ha a gráf csucsai két csoportot alkotnak oly módon, hogy az egyik csoportba tartozó csucsok nem vehetik fel a másik csoportba tartozó csucsok szerepét. Tegyük fel, hogy az első csoportba azok a csucsok tartoznak, amelyek indexei 1-től m -ig terjednek, a második csoportba $m+1$ -től n -ig. Ebben az esetben a piros fákra vonatkozó tiltómátrix a következő alakot veszi fel:

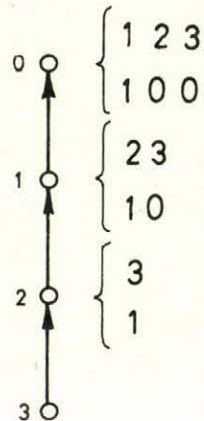
$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \begin{cases} i=1, \dots, m \text{ és } j=m+1, \dots, n \\ i=j, i=m+1, \dots, n \text{ esetén} \end{cases} \\ 1 & \text{egyéb esetekben} \end{cases}$$

Ez a tiltómátrix előzetesen meghatározásra kerül és input adatként visszük a számítógépbe.

- 2.) A fák generálásának algoritmusát azonos mind a piros, mind pedig a kék fákra. Vizsgáljuk meg részletesebben. Egy fa felépítésekor a feladat abból áll, hogy egy ismert végponthoz meg kell határozni az él kezdőpontját a szabad csucsok listájából. Vezessük be az élek végpontjára egy-
ségeesen a v_f , kezdőpontjára a v_s jelölést, ahol v_f, v_s - a csucsok kódjai. Adott v_f -hez a v_s meghatározása érdekében össze kell állítani a szabad csucsok listáját, s a listából leszám-
lálással kell kiválasztani a v_s -t. Például, ha $n=3$ és a P tiltómátrix elemei

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } i=j, \\ 1 & \text{ha } i \neq j, \end{cases}$$

akkor a 10. ábrán bemutatott fát kapjuk.

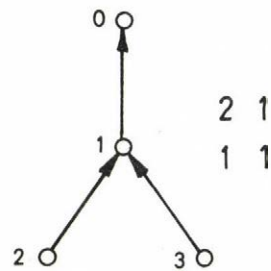
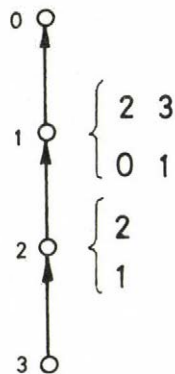


szabad csúcsok listája
leszámlálási skála

a nyilak színe piros

10. ábra.

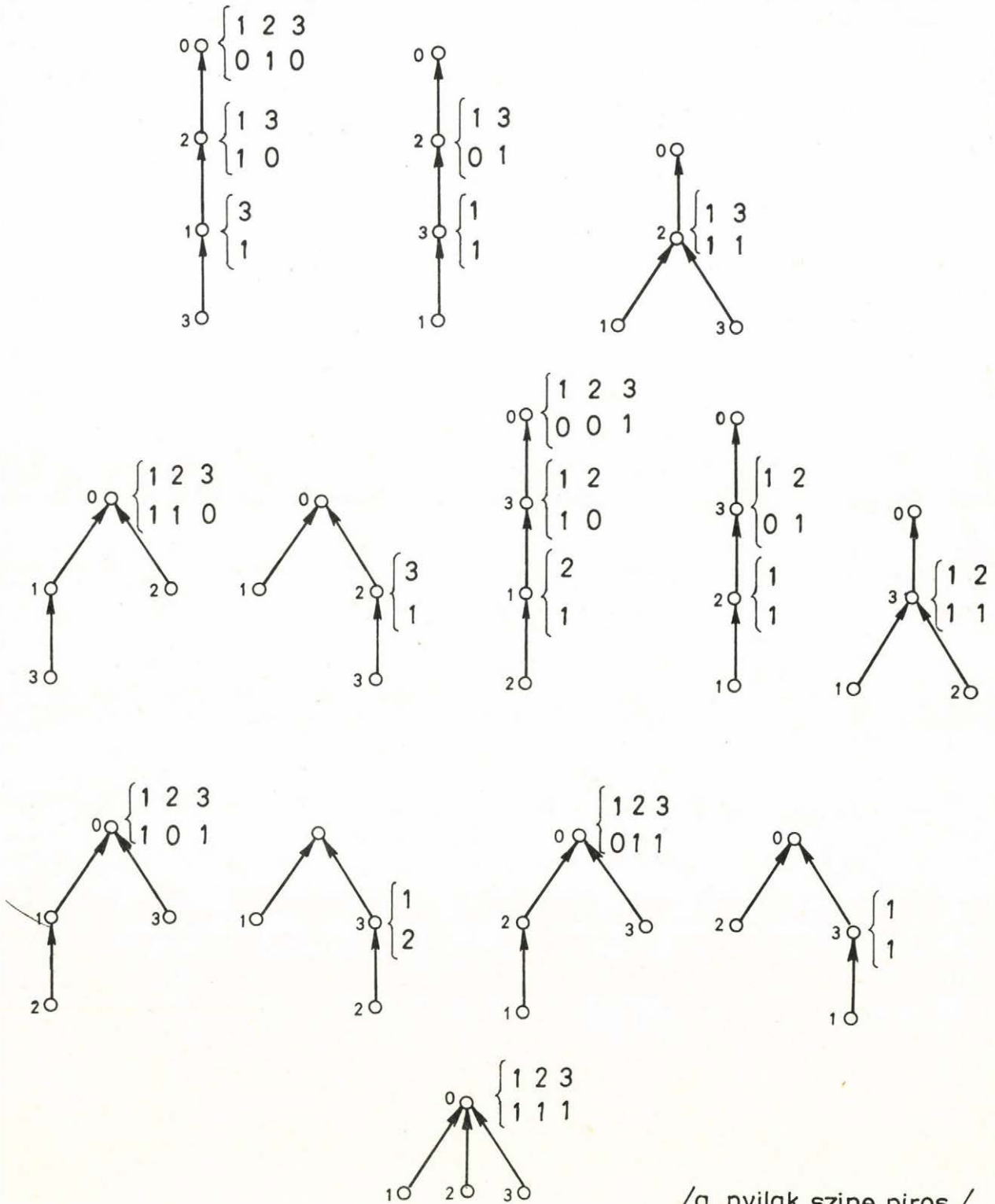
Egy fa felépítése után a leszámítást mindig a szabad csúcsok utolsó listájában kell folytatni, ahogy az a 11. ábrán látható.



a nyilak színe piros

11. ábra.

A leszámrlálást az utolsó listában befejezve áttérünk az utolsó előtti listára, s ott folytatjuk (lásd a 12. ábrát)



/a nyilak színe piros /

12. ábra.

A példa megfelel az összes 4 csucsból álló piros gyökeres fa generálásának. Számuk $4^2=16$, mivel az $n+1$ indexezett csucst tartalmazó fák száma $(n+1)^{n-1}$ [5].

Bizonyos fák letiltása esetén adott v_f -hez a v_s -t a szabad csucok listájából úgy határozzuk meg, hogy közben figyelembe vesszük a P tiltómátrix $P(v_s)$ sorát. Adott v_f -hez a megengedett v_s -ek listájának összeállítása érdekében bevezetjük az S_{fr} szabadsági skála fogalmát. Az S_{fr} szabadsági skála n pozícióból áll, elemei 0 és ∞ értéket vehetnek fel.

Ha a skála j -edik pozícióján 1 áll, akkor a j kódú csucs még szabad, vagyis még nem használtuk fel a fa felépítéséhez. Ezenkívül bevezetjük az S_{ch} kiválasztási skála fogalmát. Az S_{ch} skála szintén n pozícióból áll, melynek elemei 0-tól n -ig terjedő értékeket vehetnek fel. Ha a j -edik pozíción j áll, akkor a j csucs kiválasztható, ha 0, akkor nem.

Adott v_f -hez v_s meghatározására szolgáló kiválasztási skála két lépésben állítható elő:

$$\tilde{S}_{ch}^{v_s}(j) = S_{ch}^{v_f}(j) \cdot P(v_s, j) \quad j=1, \dots, n-re \quad 2.1$$

$$S_{ch}^{v_s}(j) = \tilde{S}_{ch}^{v_s}(j) \cdot S_{fr}(j) \quad 2.2$$

ahol $S_{ch}^{v_f}$ - a v_f végpontok kiválasztási skálája;

$S_{ch}^{v_s}$ - a v_s kezdőpontok kiválasztási skálája;

$P(v_s)$ - a tiltómátrix v_s -edik sora;

S_{fr} - a pillanatnyi szabadsági skálája.

A fák generálása céljából kialakítunk egy $(n+1) \times 36$ -os méretű tömböt az R stack formájában. Az adott stack segítségével $n+1 \leq 9$ csucsból álló fákat lehet generálni. $n=8$ esetén az összes piros fa száma $9^7=4782969$. Ezekre illeszkednek még a kék fák, vagyis a keletkező gráfok száma olyan nagy, hogy nagyon sok idő szükséges sorrend megállapítására közöttük. Ezért az algoritmussal generált rendszerekben az elemek számát $n \leq 8$ -al korlátozzuk. A stack sorait szakaszokra osztjuk fel. Ábrázoljuk az $i+1$ -dik sort.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
v_f	v_s	f	\bar{s}_{ch}									s_{ch}							etalon leszámblálási sorozat							pillanatnyi leszámblálási sorozat							c		

- ahol v_f - az i -edik él végpontjának kódja;
 v_s - az i -edik él kezdőpontjának kódja;
 f - index, amely 1 értéket vesz fel nullás leszámbláláskor (lásd alább), $f=0$ egyéb esetekben;
 \bar{s}_{ch} - a v_s kiválasztási skála meghatározásának első lépése;
 s_{ch} - a v_s kiválasztási skálája;
 c - az etalon leszámblálási sorozat nullától különböző kódjainak mutatója

A fák generálásához az R stack-en kívül felhasználjuk a P tiltómátrixot, az s_{fr} szabadsági skálát és bevezetjük még az s_h segédskálát, amely n pozícióból áll 0 és 1 elemekkel. Ha a j -edik pozíción 1 áll, akkor a j -edik csucs részt vett a pillanatnyi leszámblálásban.

Az R stack első sora előre rögzített és például $n=3$ esetben a következő alakú:

0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
v_f	v_s	f	\bar{S}_{ch}								S_{ch}								e.l.s.								p.l.s.								c			

Az R stack további n sora nullákkal van feltöltve.
A P tiltómátrix $n=3$ esetében a következő alakú

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Az S_{fr} szabadsági skála kiindulási helyzetben egyesekkel van feltöltve, vagyis $S_{fr}(j)=1, j=1, \dots, n$, az S_h segédskála pedig nullákkal - $S_h(j)=0, j=1, \dots, n$. Példánkban $n=3$ esetén $S_{fr}=(1 \ 1 \ 1)$, $S_h=(0 \ 0 \ 0)$. Az algoritmus a pillanatnyi leszámolási sorozat kialakításával indul

$$\Pi_p(j) = |\Pi_p(j) - \Pi_e(j)| \quad 2.3$$

ahol

- Π_p - a pillanatnyi leszámolási sorozat skálája;
- Π_e - az etalon leszámolási sorozat skálája;

Az abszolút értékű kivonás $j=1$ -től kezdődik és mindaddig folytatódik, amíg a Π_p -ben meg nem jelenik az első nullától különböző kód. A $\Pi_p(j)$ skála meghatározásakor három eset fordulhat elő:

- 1.) Új leszámolás jön létre, vagyis a $\Pi_p(j)$ skálaelem nulla állapotból nem nulla állapotba kerül. Ebben az esetben az R stack-ben lefelé lépünk és az első csak nullákkal feltöltött sorban új sort hozunk létre.
- 2.) Nem jön létre új leszámolás, vagyis a $\Pi_p(j)$ skálaelem nem nulla állapotból nulla állapotba kerül. Ebben az esetben az R stack utolsó nullától különböző sorát töröljük (nullákkal töltjük fel).
- 3.) Nullás leszámolás jön létre, vagyis a $\Pi_p(j)$ skálaelem nulla állapotban volt és abban is marad. Ebben az esetben megpróbálkozunk új sor létrehozásával a stack első nullás sora helyén. Ha a sor számára már meghatározásra kerültek a v_f és v_s csucskok, akkor a próbálkozás sikeres, ha nem, akkor felfelé kell lépni a stack-ben. Nullás leszámolás esetén a munkában levő sorban az f indexnek 1 értéket adunk.

Minden esetben felfelé lépéskor a következő szabályok szerint kell eljárni:

- 1.) ha az i -edik sorból visszalépve az $i-1$ -edik sorba az $i-1$ -edik sor indexe $f=0$, akkor a leszámolást az $i-1$ -edik sorban kell folytatni;
- 2.) ha az i -edik sorból visszalépve az $i-1$ -edik sorba az $i-1$ -edik sor indexe $f=1$, akkor vissza kell lépni az $i-2$ -edik sorra és így tovább mindaddig, amíg a sor indexe $f=0$ nem lesz.

A pillanatnyi leszámolási sorozat meghatározására adott algoritmus felhasználásával az R stack első sora a következő alakot veszi fel:

Az \bar{S}_{ch} és S_{ch} skálákat a (2.1) és (2.2) képletek felhasználásával határozzuk meg, a Π_e skálát a S_{ch} -ből kapjuk a nullák elhagyásával és a nullától különböző kódok balra tömörítésével. Az S_h és S_{fr} skálák a következő alakot veszik fel:
 $S_h = (0 \ 1 \ 0)$ és a (2.4) képlet szerint
 $S_{fr} = (0 \ 0 \ 1)$.

Az R stack következő sorai

1	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	1		
v_f	v_s	f	\bar{s}_{ch}								s_{ch}								Πe								Πp								c

$$S_h = (0 \ 0 \ 1) \quad , \quad S_{fr} = (0 \ 0 \ 0)$$

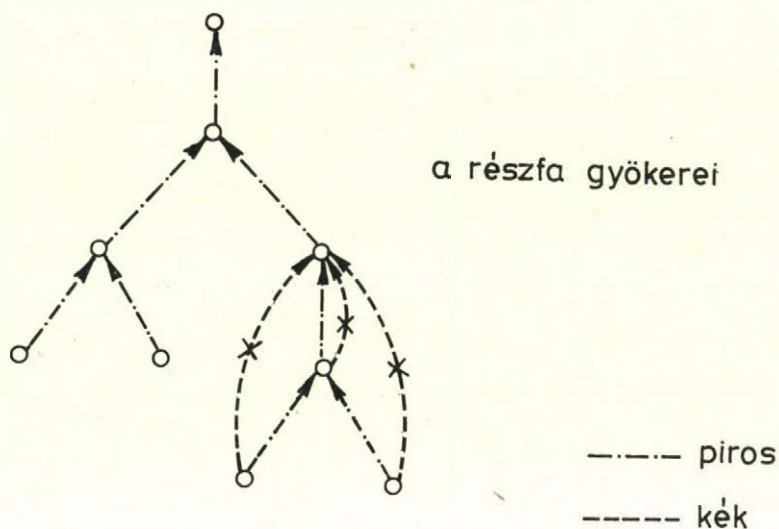
2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
v_f	v_s	f	\bar{s}_{ch}								s_{ch}								Π_e								Π_p								c

Ily módon a következő fát kaptuk $\begin{pmatrix} 01 \\ 12 \\ 23 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$

Egy fa akkor van felépítve, ha $S_{fr}(j)=0$, $j=1, \dots, n$, vagyis amikor már nincs több szabad csucs. A következő fa felépítése érdekében folytatni kell az utolsó befejezetlen leszámlálást (példánkban a 3. sorban). Az adott szinből valamennyi fát felépítettünk, ha az R stack első sorában $f=1$.

- 3.) Egy piros fára illeszthető kék fákra vonatkozó tiltómátrix meghatározásakor a következő, a megengedettség második elvének megfelelő tulajdonságot használjuk fel: ha az adott piros fa tetszőleges csucsát gyökérnek tekintjük, a megfelelő rész-

gráfban, akkor a kék fában nem lehet olyan él, amely e részgráf csucsaiból a részgráf gyökere felé irányított (13. ábra).



13. ábra.

A kék fákra vonatkozó P tiltómátrix felépítését a következő $n \times n$ -es mátrix képzésével kezdjük:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } i=j \\ 1 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Ha bizonyos piros fákat letiltottunk (lásd az 1.) pontot), akkor a P tiltómátrix kiindulási alakja a következő

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \begin{cases} i=j, i=1, \dots, m \\ i=m+1, \dots, n \text{ és } j=1, \dots, m \end{cases} \\ 1 & \text{egyéb esetekben.} \end{cases}$$

Majd vesszük a piros fa éleinek listáját

$$\begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ \vdots \\ a_n b_n \end{bmatrix} \uparrow$$

és alulról fölfelé vagyis $(a_n b_n)$ -től $(a_1 b_1)$ felé haladva végigvizsgáljuk. A P tiltómátrix a_i -edik sorát $P(a_i)$ -t a következőképpen határozzuk meg

$$P(a_i) = P(a_i) \& P(b_i) \quad 2.5$$

a_i -t és b_i -t a piros fa éleinek listájából vesszük alulról felfelé addig haladva, amíg el nem érjük az $a_i = 0$ -t. $a_i = 0$ elérésekor a P tiltómátrix felépítése befejeződött.

4.) A kék fák generálása a piros fákéhoz hasonlóan történik, az egyetlen eltérés abban van, hogy a generálás során a kék fákra vonatkozó tiltómátrixot vesszük figyelembe. A generálás eredményeképpen az adott piros fára illeszthető kék fákat kapjuk meg. A piros fa egy hozzá tartozó kék fával teljes egészében meghatároz egy gráfot, amely kielégíti a megengedettség első két feltételét.

Példaként egy piros fa, amely éleinek listája

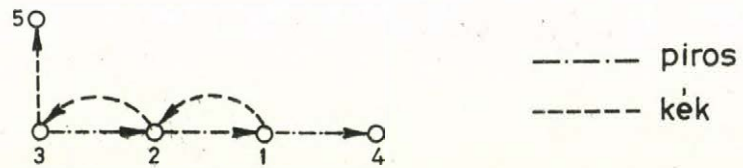
$$\begin{bmatrix} 01 \\ 12 \\ 23 \end{bmatrix}$$

és egy kék fa

$$\begin{bmatrix} 03 \\ 32 \\ 21 \end{bmatrix}$$

éllistával a 14. ábrán

bemutatott gráfot határozza meg.

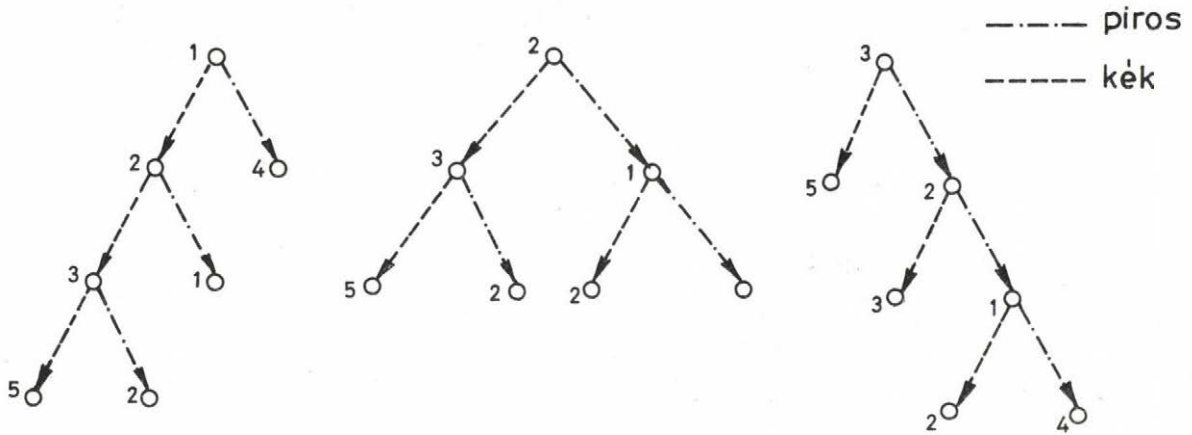


14. ábra.

A gráf akkor felel meg egy megengedett szétválasztási rendszernek, ha ismertek a megengedettség harmadik feltételét kielégítő források.

5.) A lehetséges források meghatározása a megengedettség harmadik feltételén alapul, vagyis a forrás szerepét csak az a csucs játszhatja, amelyből az irányított élek mentén elérhető az összes többi csucs.

A generálás eredményeként egy gráfot kaptunk egy piros fa és egy kék fa éleinek listájaként. (lásd a 14. ábrát). A forrás meghatározásakor egymás után megvizsgáljuk az $i=1, \dots, n$ kódú csucsokat, hogy a kiválasztott i -edik csucsból az adott éllisták mentén elérhető-e a további $n+1$ csucs (a fentiekben tett megjegyzés értelmében a piros fa nyelőjének 0 kódját átkódoljuk $n+1$ -é, a kék fáét pedig $n+2$ -vé) (15. ábra).



15. ábra.

A 14. ábrán bemutatott példa esetében, ahogy a 15. ábrából látható, mind a három csucs betöltheti a forrás szerepét és ennek megfelelően három különböző megengedett szétválasztási rendszert kapunk.

A fenti algoritmus megvalósítása érdekében két skálát használunk fel: az

S_{ug} -t - a felhasználható csucskok skáláját és

S_{ud} -t - a felhasznált csucskok skáláját. A S_{ug} skála $n+2$ pozíciós, elemei 0 és 1 értékeket vehetnek fel. Ha az i -edik pozíción 1 áll, akkor az i -edik csucs felhasználható. Az S_{ug} skálából az $n+1$ és $n+2$ pozíciókon lévő csucskokat már nem használjuk fel, mivel azok nyelők, s belőlük nem lépnek ki élek. Ezért az S_{ud} skála n pozíciós, elemei 0 és 1 értékeket vehetnek fel. Ha az i -edik pozíción 1 áll, akkor az i -edik csucskot már felhasználtuk. Ha például, lehetséges forrásként az 1. csucskot választjuk ki a skálák a következő alakúak:

S_{ud}

1	0	0
---	---	---

S_{ug}

1	1	0	1	0
---	---	---	---	---

Balról jobbra haladva megvizsgáljuk az S_{ug} skálát. A felhasználható 1. csucst már megvizsgáltuk, a felhasználható 2. csucst még nem. Felhasználásakor a skálák a következő alakot veszik fel:

$$S_{ud} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{ug} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ismét megvizsgáljuk az S_{ng} skálát. Az 1. és 2. csucso-
kat már felhasználtuk, vesszük a felhasználható 3. csu-
csot

$$S_{ud} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{ug} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

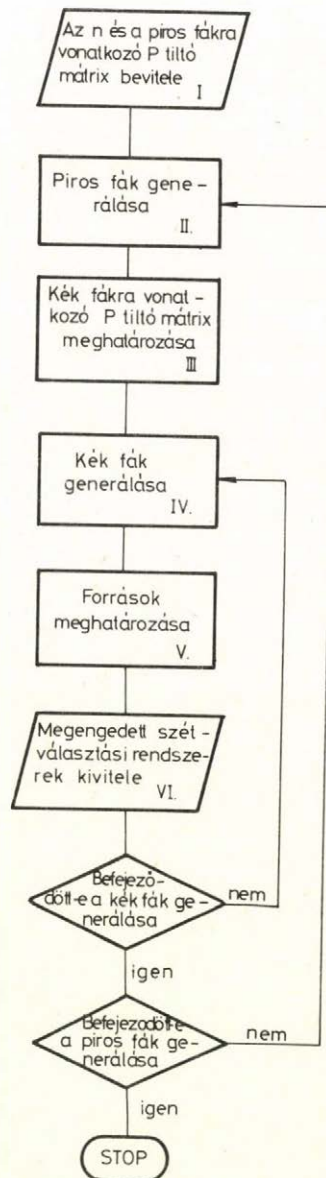
A kezdetben kiválasztott csucs megfelel forrásnak, ha teljesül

$$\sum_{j=1}^n S_{ud}(j) = n \quad 2.6$$

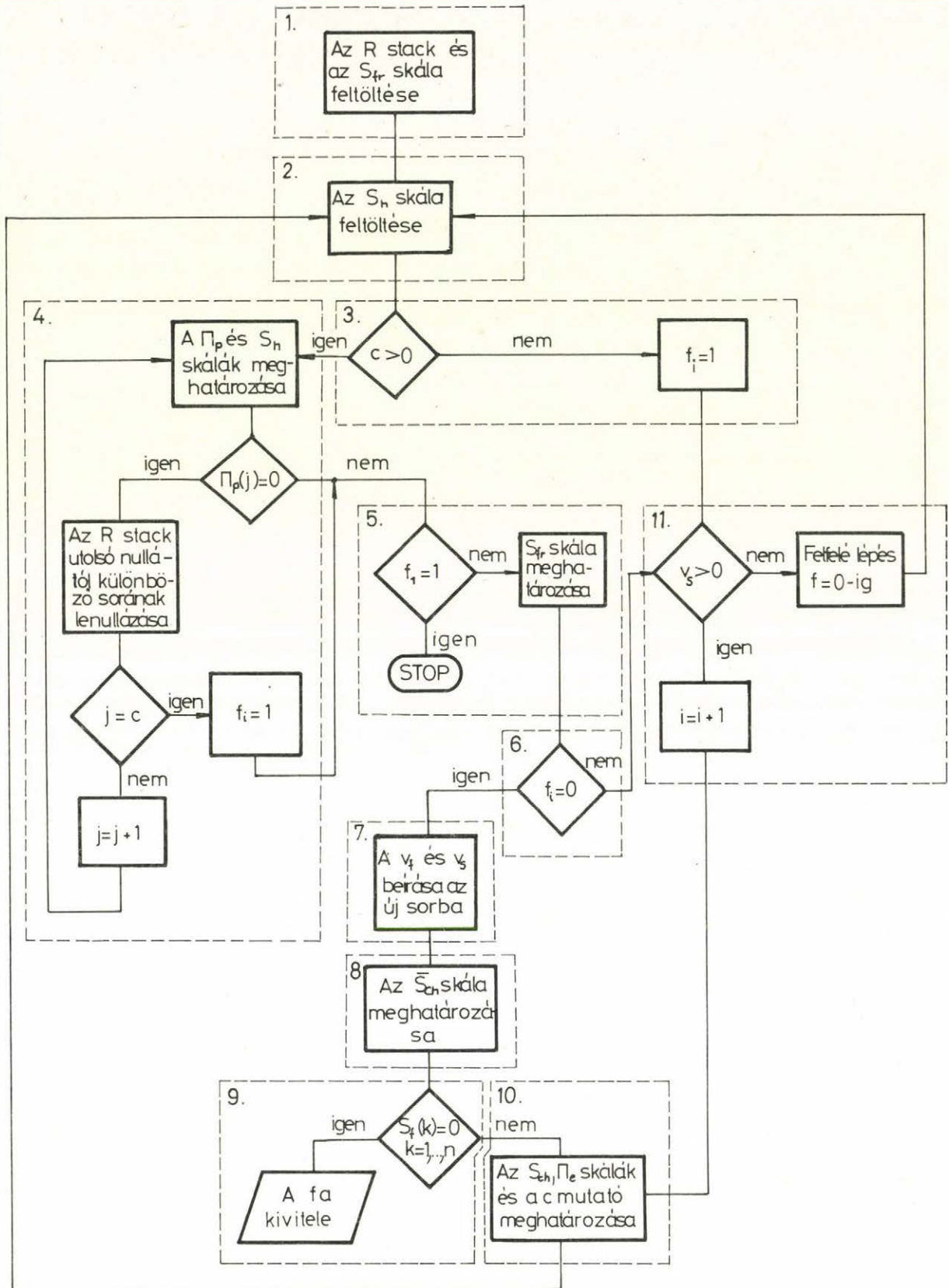
Ilymódon ellenőrizzük a megengedettség harmadik feltételeinek teljesülését valamennyi n csucsra. Egy piros fa éleinek listája egy ráilleszthető kék fa éleinek listájával és a meghatározott forrással együtt nem más, mint egy megengedett gráf, amely adekvát módon ír le egy megengedett szétválasztási rendszert.

3.§. A megengedett szétválasztási rendszer generálására szolgáló algoritmus számítógépes realizációja

A 2.§.-ban leírt, megengedett szétválasztási rendszerek generálására szolgáló algoritmust FORTRAN-IV nyelven programoztuk a moszkvai Irányítási Problémák Intézete ICL 4-70-es gépére. Ez a program szerves részét képezi a GRAPH nevű programcsomagnak, amely anyagszétválasztási rendszerek tervezésére és optimális üzemmódjának meghatározására szolgál. A program szakaszokból épül fel, melyek megfelelnek az algoritmus szakaszainak (16. ábra).



16. ábra



17. ábra

Vizsgáljuk meg a program felépítését szakaszonként.

I. s z a k a s z. Input adatként bevisszük a szétválasztási rendszer elemeinek n számát és a piros fákra vonatkozó til-tómátrix P_{ij} elemeit.

II. s z a k a s z. Elvégezzük a piros fák generálást a 17. ábrán bemutatott blokk-vázlatnak megfelelően. A blokk-vázlaton szaggatott vonallal különítettük el a II. szakasz egyes lépéseit.

1. lépés. Az R stack előre rögzített első sorának feltöltése és a soronkövetkező n sor lenullázása. Az S_{fr} szabadsági skála n pozíciójának feltöltése egyesekkel.

2. lépés. Az S_h segédskála n pozíciójának feltöltése nullákkal.

3. lépés. A c mutató értékének ellenőrzése, ha $c=0$ -a munkában levő i -edik sor f indexének 1 értéket adunk és a generálást a 11. lépéstől folytatjuk;
 $c>0$ - a generálás a 4. lépéstől folytatódik.

4. lépés. A pillanatnyi leszámolási skála meghatározása a $\Pi_p(j) = |\Pi_p(j) - \Pi_e(j)|$ képlet felhasználásával, illetve az S_h segédskála kialakítása.

A $\Pi_p(j)$ értékének ellenőrzése, ha
 $\Pi_p(j) > 0$ - a generálás az 5. lépéstől folytatódik;
 $\Pi_p(j) = 0$ - lenullázzuk az R stack utolsó nullától

különböző sorát. Ha az egész leszámolás során $\Pi_p(j) = 0$, $j=1, \dots, c$, akkor az i -edik sor f indexének 1 értéket adunk és a generálást az 5. lépéstől folytatjuk.

5. lépés. Az f index ellenőrzése az R stack első sorában, ha

$f=1$ -a generálása befejeződött;

$f=0$ -meghatározásra kerül a szabadsági skála az

$S_{fr}(j) = |S_{fr}(j) - S_h(j)|$, $j=1, \dots, n$ képlet felhasználásával.

6. lépés. A munkában levő i -edik sor indexének ellenőrzése, ha

$f=1$ -a generálás a 11. lépéstől folytatódik, ha

$f=0$ -megkeressük az R stack első nullás sorát.

7. lépés. A v_f és v_s beírása új sorba. Az új sor v_f -je egyenlő a munkában levő i -edik sor v_s -ével, az új sor v_s -e egyenlő az i -edik sor nullától különböző $\Pi_p(j)$ -vel.

8. lépés. A kiválasztási skála \bar{S}_{ch} állapotának meghatározása az új sor számára az $\bar{S}_{ch}^{v_s}(j) = S_{ch}^{v_f}(j) \cdot P(v_s, j)$, $j=1, \dots, n$ képlet felhasználásával.

9. lépés. Az S_{fr} szabadsági skála elemeinek ellenőrzése, ha $S_{fr}(k) = 0$, $k=1, \dots, n$ - egy fa felépítése befejeződött és a fa éleinek (a_i, b_i) listája kinyomtatásra kerül, ha

$\exists S_{fr}(k) > 0$, $k=1, \dots, n$ - a generálás a 10. lépéstől folytatódik.

10. lépés. Az új sor S_{ch} szabadsági skálájának meghatározása az $S_{ch}^{v_s}(j) = \bar{S}_{ch}^{v_s}(j) \cdot S_{fr}(j)$, $j=1, \dots, n$ képlet felhasználásával. A Π_e etalon leszámolási skála meghatározása az S_{ch} skála nullától különböző elemeiből azok balra tömörítésével. A c mutató értékének meghatározása. c értéke egyenlő a Π_e skála nullától különböző elemeinek számával. Ugrás a 2. lépésre.

11. lépés. A soronkövetkező sor ellenőrzése, ha

$v_s > 0$ - áttérünk erre a sorra és a generálás a 10. lépéstől folytatódik,

$v_s = 0$ - felfelé lépünk az R stack-ben a legközelebbi sorra, melyben $f=0$, ezután a generálás a 2. lépéstől folytatódik.

III. s z a k a s z. Meghatározzuk a kék fákra vonatkozó tiltómatrix P_{ij} elemeit.

1. lépés. A P_{ij} mátrix elemek meghatározása a következő képlet felhasználásával

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } i=j \\ 1 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n$$

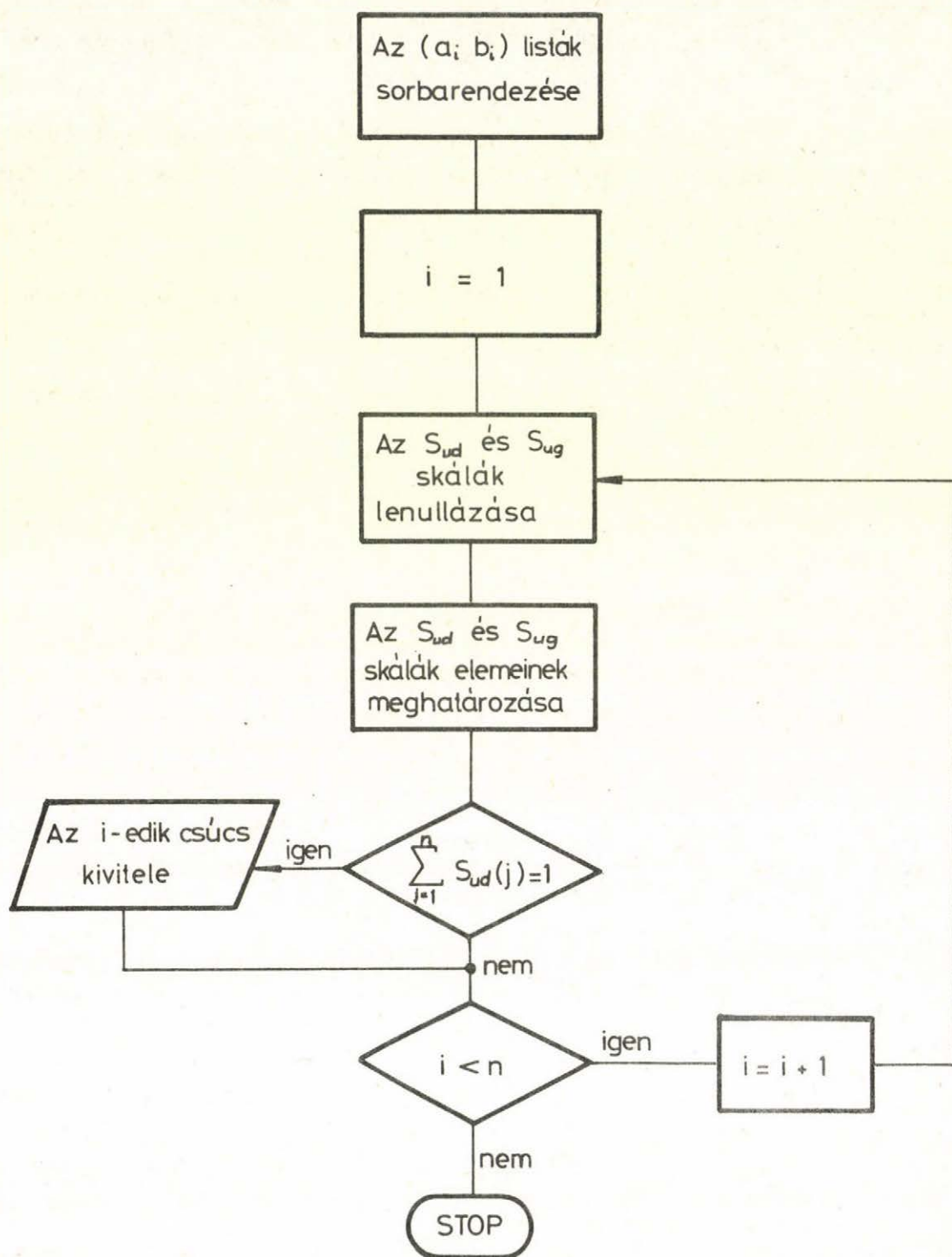
2. lépés. A piros fa éleinek (a_i, b_i) , $i=1, \dots, n$ listája alapján a tiltómatrix $P(a_i)$ sorainak meghatározása a $P(a_i) = P(a_i) \& P(b_i)$ képlet felhasználásával.

IV. s z a k a s z. Elvégezzük a kék fák generálását. Generálásuk szintén a 17. ábrán bemutatott blokk-vázlat alapján történik.

V. s z a k a s z. Elvégezzük a lehetséges források meghatározását a 18. ábrán bemutatott blokk-vázlat szerint.

1. lépés. A piros és kék fa (a_i, b_i) éllistáinak sorba rendezése a b_i kód növekedésének megfelelően. Ilymódon egyszerűbbé válik az S_{ud} és S_{ug} skálák meghatározásához szükséges csucskiválasztása.

2. lépés. A lehetséges forrásként kiválasztott csucsk számlálójának az 1. csucs kódjának megfelelően 1 értéket adunk, $i=1$.



18. ábra

3. lépés. Az $S_{ud}(j)$, $j=1, \dots, n$ és $S_{ug}(j)$, $j=1, \dots, n+2$ skálák lenullázása.

4. lépés. A $S_{ud}(j)$, $j=1, \dots, n$ és $S_{ug}(j)$, $j=1, \dots, n+2$ skálák elemeinek meghatározása a 2.§.-ban leírt algoritmus szerint.

5. lépés. A $\sum_{j=1}^n S_{ud}(j) = n$ egyenlőség teljesülésének ellenőrzése, ha

$$\sum_{j=1}^n S_{ud}(j) = n - \text{a kiválasztott } i\text{-edik csucs}$$

kinyomtatásra kerül, mint forrás és a forrás kiválasztás a 6. lépéstől folytatódik,

$$\sum_{j=1}^n S_{ud}(j) \neq n - \text{ugrás a 6. lépésre.}$$

6. lépés. A lehetséges források számlálójának ellenőrzése, ha

$i < n$ - lehetséges forrásként a soronkövetkező $i+1$ -edik, $i=1, \dots, n$, csucs körül kiválasztásra és ugrás történik a 3. lépésre,

$i = n$ - a lehetséges források kiválasztása befejeződött.

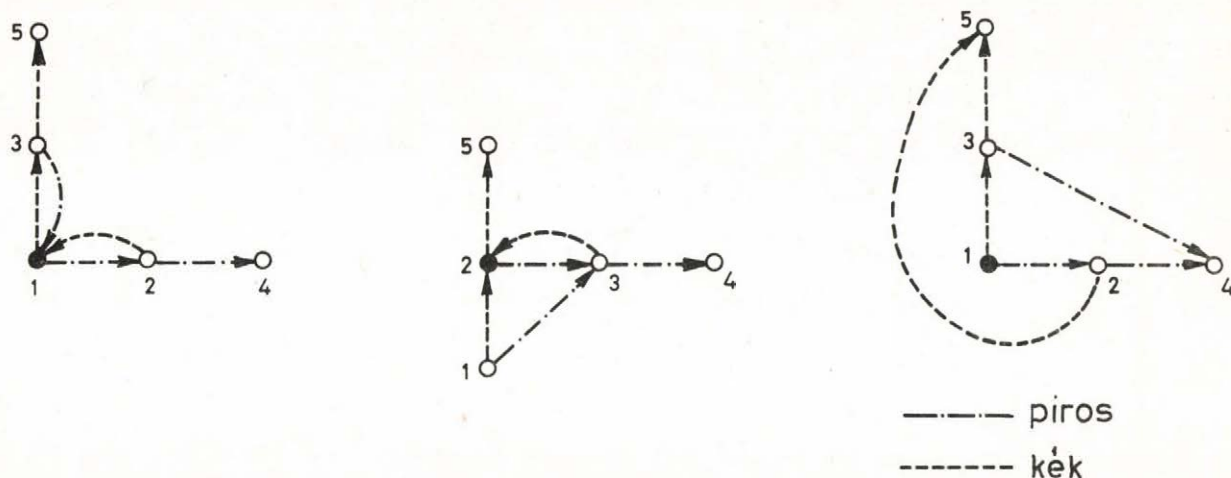
Az egész program ~360 utasításból áll, melyek közül a II. és IV. szakaszt megvalósító utasítások (~120 utasítás) azonosak.

Az algoritmusnak megfelelően kinyomtatásra kerül a piros fákra vonatkozó tiltómátrix, a generált piros fa, a piros fára illeszthető kék fákra vonatkozó tiltómátrix, majd a kék fák, mindegyikük mellett feltüntetve a lehetséges források listája. Három elemből álló megengedett szétválasztási rendszerként a generálás során 186 rendszert kaptunk. A generálás 0.005 sec gépidőt igényelt, vagyis a módszer nagyon gyors, de a kapott rendszerek nagy száma miatt összehasonlításukkor sok idő szükséges a számítások elvégzésére. Vizsgáljuk meg mi okozza, hogy a kapott megenge-

dett szétválasztási rendszerek száma ilyen nagy. A fentiekben leírt algoritmus felhasználásakor a szétválasztó elemek permutációja következik be a szétválasztási rendszerben. Ez a permutáció jogos, mivel a rendszert alkotó szétválasztó elemek határgörbéi általában különbözőek. Ezzel magyarázható a három elemből álló megengedett szétválasztási rendszerek általuk kapott száma és a [41] munkában kapott számuk közötti különbség. A [41] munkában 17 megengedett rendszert állított elő a szerző a duális rendszereket figyelmen kívül hagyva (vagyis azokat, amelyek a kapott 17 rendszerből az áramok felcserélésével keletkeznek (a gráfban az áramok felcserélése az élek színezésének felcserélésével azonos)). A duális rendszerek és az elemek permutációjának figyelembevételével a megengedett rendszerek N_1 száma

$$N_1 = 17 \cdot 2 \cdot 3! = 204$$

ahol $3!$ - a három elemből álló permutációk száma.



19. ábra.

A megengedett 17 rendszerből három rendszer (19. ábra) belőlük duális rendszer képzésekor és az elemek permutációjakor 6 izomorf rendszert eredményez egy-egy rendszer esetében kelekező 12 változat közül. Izomorfizmus akkor alakul ki duális rendszerek képzése és az elemek permutációja során, ha a gráfot alkotó fák strukturája azonos (lásd a 19. ábrát). Ez az izomorfizmus nem jön létre. A rendszerek N_1 számából az izomorf rendszerek kizárásával megkapjuk a nem izomorf megengedett rendszerek N számát

$$N = N_1 - 3 \cdot 6 = 186$$

vagyis ugyanazt a számot kapjuk, mint az algoritmus segítségével generált rendszerek száma.

Milyen lehetőségek vannak a generált megengedett rendszerek számának csökkentésére? Először is meg kell jegyezni, hogy az általunk javasolt eljárás teljesen általános esetre vonatkozik. Minden konkrét esetben járulékos sajátosságok merülnek fel, amelyek járulékos megengedettségi feltételek bevezetését teszik szükségessé. Minden további feltétel bevezetése a megengedett rendszerek számának csökkentését eredményezi. Felsorolunk néhány módszert a generált rendszerek számának csökkentésére:

- 1.) Letiltjuk a szétválasztási rendszer elemeinek teljes permutációját (például iszaptalánítási folyamatban résztvevő hidroszeparátorok és hidrociklok egymással nem cserélhetők fel). Ez a korlátozás a piros fákra vonatkozó tiltómátrix kialakításával vehető figyelembe az algoritmusban leírt módon.
- 2.) Olyan generáló algoritmus kidolgozása, amely nem végzi el az elemek permutációját a rendszerben. Erre a célra nem izomorf nem indexezett fák generálására szolgáló algoritmus használható fel [13].
- 3.) Csak olyan rendszerek generálása, amelyek alapkapsolások kompozíciójával építhetők fel. Ebben az esetben egy feltételezést teszünk, u.m. a legjobb rendszer mindig az alapkapsolások kompozíciójával kialakított rendszerek részhalmazának eleme. Ezt a feltételezést nem sikerült ugyan még bebizonyítanunk, de helyességét a gyakorlat sugallja, ugyanis a gyakorlatban alkalmazott szétválasztási rendszerek, amelyek sokéves tapasztalat eredményeként alakultak ki döntő többségben alapkapsolások kompozíciójaként írhatók fel. Lehetőség van a fentiekben bemutatott algoritmus továbbfejlesztésére a kompozíciós rendszerek részhalmazának kiválasztására a generált összes rendszer halmazából. Lehetséges a kompozíciós rendszerek előállítása más módon is, hiszen a kompozíciós rendszerek meghatározása szerint az n elemből álló kompozíciós rendszerek $n-1$ zárójel és a $=, >, <, \rightarrow, \leftarrow$ 4 műveleti

jel felhasználásával állíthatók elő.

A műveleti jelek kitételének feladata a következőképpen fogalmazható meg. Tegyük fel, hogy 4 fajta műveleti jelünk van, melyek felhasználásával össze kell kötnünk n szétválasztási elemet. Határozzuk meg a lehetséges összekötések számát.

Ez a feladat n elem r -ed fokú ismétléses variációjának meghatározási feladatára vezethető vissza [40]. m elemből álló r -ed fokú ismétléses variációk száma:

$$U(m, r) = m^r \quad 2.7$$

Esetünkben $m=4$, $r=n-1$. Vagyis a műveleti jelek lehetséges kitételének száma n szétválasztó elem esetén

$$U_n = 4^{n-1}$$

A zárójelek kitételének feladata a következőképpen fogalmazható meg. Tegyük fel, hogy a szétválasztási rendszer n elemből áll. Határozzuk meg a zárójelek összes lehetséges kitételének számát, amellyel a szétválasztási rendszer alapkapcsolások kompozíciójaként írható fel.

Ez a feladata egy kombinatorikai kompozíciós feladat és visszavezethető $x_1 x_2 \dots x_n$ sorozat előállítási módjai számának meghatározására bináris nem asszociatív sorozatok formájában [47]. n elem esetén a zárójelkitételek számának meghatározására szolgáló rekurzív képlet a következő

$$P_n = P_{n-1} P_1 + P_{n-2} P_2 + \dots + P_2 P_{n-2} + P_1 P_{n-1}, \quad n \geq 2$$

Tegyük fel, hogy $P_1=1$. Vizsgáljunk meg egy példát

$$P_2 = P_1 P_1 = 1$$

$$(1 \square 2)$$

$$P_3 = P_2 P_1 + P_1 P_2 = 2$$

$$((1 \square 2) \square 3) \quad (1 \square (2 \square 3))$$

$$P_4 = P_3 P_1 + P_2 P_2 + P_1 P_3 = 5$$

$$(((1 \square 2) \square 3) \square 4) \quad ((1 \square 2) \square (3 \square 4)) \quad (1 \square ((2 \square 3) \square 4))$$

$$((1 \square (2 \square 3)) \square 4) \quad (1 \square (2 \square (3 \square 4)))$$

ahol \square -a négy lehetséges műveleti jelek egyike. Az adott feladat esetében a $\Phi(z)$ előállítási függvény a következő alakot veszi fel

$$\Phi(z) = P_1 z + P_2 z^2 + \dots + P_n z^n + \dots = \sum_i P_i z^i \quad 2.9$$

A 2.9 előállítási függvény felhasználásával a zárójelkitételek számának meghatározására n elem esetén a következő képletet kapjuk

$$P_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \quad , \quad n \geq 2 \text{ -re} \quad 2.10$$

Ilymódon, az n elemből kialakítható kompozíciós rendszerek N_2 száma egyenlő

$$N_2 = U_n \cdot P_n$$

$n=3$ esetén $N_2=32$. A 32 kompozíciós rendszer közül a

$$((1 \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \quad ((1 \rightarrow 2) \rightarrow 3) \quad ((1 \Leftarrow 2) \Leftarrow 3) \quad ((1 + 2) + 3)$$

$$(1 \Rightarrow (2 \Rightarrow 3)) \quad (1 \rightarrow (2 \rightarrow 3)) \quad (1 \Leftarrow (2 \Leftarrow 3)) \quad (1 \leftarrow (2 \leftarrow 3))$$

rendszerek páronként izomorfok, vagyis a nem izomorf kompozíciós rendszerek száma $n=3$ esetén $N=28$. Ebben az esetben nem végeztük el az elemek permutációját a rendszerben. A kompozíciós rendszerek generálásának ez a módszere a permutációk egyszerű elvégzését teszi lehetővé és $n>3$ esetén a megengedett szétválasztási rendszerek számának jelentős csökkenését eredményezi. A módszer hiányossága, hogy izomorf rendszereket is létrehoz ($n=3$ esetén 32-ből 4-et), melynek kiküszöbölése komoly nehézségekbe ütközik.

III. ANYAGSZÉTVÁLASZTÁSI RENDSZEREK HATÁRGÖRBÉJÉNEK MEGHATÁROZÁSA

1.§. A feladat megfogalmazása és a megoldási módszer kiválasztása

Az I. fejezetben a feladat megfogalmazásakor a következőképpen határoztuk meg a munkánk célját:

- anyagszétválasztási rendszerek tervezésének automatizálása a megengedett rendszerek generálása és közülük a legjobb rendszer kiválasztása;
- a rendszer optimális üzemmódjának meghatározása a kiválasztott optimalizálási kritériumnak megfelelően.

A II. fejezetben algoritmust adtunk, amely lehetővé teszi a megengedett szétválasztási rendszerek generálását az első feladatnak megfelelően. E feladat megoldásának következő lépéseként el kell végezni a legjobb rendszer kiválasztását a generálással kapott megengedett rendszerek halmazából. Az I. fejezetben meghatároztuk a jobb rendszer fogalmát a rendszerek határgörbéinek összehasonlításával. Tehát a generált megengedett rendszerek határgörbéinek meghatározása és összehasonlítása lehetővé teszi a legjobb rendszer kiválasztását. Másrészt, a határgörbe a rendszer szétválasztási képességének határát írja le. Ezért a második feladatban megfogalmazott optimális üzemmód meghatározásakor a kapott munkapont általában a határgörbe egyik pontjának felel meg. Ebből következően egy fontos megállapítást tehetünk: mind az első, mind pedig a második feladat megoldásában nagy szerepet játszik a rendszer határgörbéje. Ezért ebben a fejezetben a határgörbe meghatározásával foglalkozunk.

Definíció szerint a rendszer határgörbéjének meg kell felelnie a határgörbe feltételeinek és biztosítania kell az x komponens maximális k kihozatalát a koncentrátumba

az y komponens koncentrációjában való l kihozatalának különböző rögzített értékeinél a $(0,1)$ intervallumban. Vagyis a rendszer határgörbéjének meghatározási feladata a következőképpen fogalmazható meg:

Keressük $\max k$, ahol $k=f(k_1, \dots, k_n)$,
különböző rögzített

$$l=f(l_1, \dots, l_n)$$

értékeknél, ahol $l \in (0,1)$, ha adottak a következő összefüggések

$$l_i = \phi_i(k_i), \quad 0 \leq k_i \leq 1, \quad i=1, \dots, n$$

ahol az

f függvények a kapcsolati egyenletek, melyek hasonló alakúak mind a k , mind pedig az l független változók esetén; a

ϕ_i függvény pedig, $i=1, \dots, n$, az i -edik elem határgörbéje,

n - a rendszert alkotó elemek száma. Definíció szerint $\phi_i(k_i)$ monoton növekvő konvex függvény a $k_i \in [0,1]$ intervallumban.

A gyakorlatban az i -edik $i=1, \dots, n$ szétválasztó elemen áthaladó anyagáramot korlátozzák az elem méretei és teljesítőképessége. Ezt a korlátozást az i -edik elemre vonatkozó cirkulációs áram felülről való korlátozásával vesszük figyelembe, vagyis

$$g_i(k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n) \leq \xi_i, \quad i=1, \dots, n$$

ahol g_i - az i -edik szétválasztó elemre vonatkozó cirkulációs áram

ξ_i - az i -edik elemre vonatkozó cirkulációs áramra megadott korlátozás értéke.

Az x komponens maximális kihozatala a koncentráumban az y komponens koncentráumban való kihozatalának különböző rögzített értékeinél egyenértékű az y komponens minimális kihozatalával a koncentráumban az x komponens koncentráumban való kihozatalának különböző rögzített értékeinél. Vagyis a határgörbe meghatározásfeladata a következő feladat megoldására vezethető vissza:

Keressük $\min l$, ahol $l = f(l_1, \dots, l_n)$, különböző rögzített

$$k = f(k_1, \dots, k_n)$$

értékeknél, ahol $k \in (0, 1)$, ha adottak a következő összefüggések

$$l_i = \phi_i(k_i), \quad i=1, \dots, n$$

és teljesülnek a következő korlátozások

$$\begin{aligned} g_i(k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n) &\leq \xi_i \\ 0 &\leq k_i \leq 1 \end{aligned} \quad i=1, \dots, n$$

Amint az az alapkapcsolások esetén látható volt, az f és g_i függvények racionális tört függvények, a ϕ_i függvények pedig nemlineáris függvények. Ezért a fenti feladat nemlineáris programozási feladat. Az $l_i = \phi_i(k_i)$, $i=1, \dots, n$ helyettesítés elvégzésével a nemlineáris programozási feladat a következő alakra hozható.

$$\text{Keressük } \min l, \text{ ahol } l = f(\phi_1(k_1), \dots, \phi_n(k_n)) \quad 3.1$$

$$k = f(k_1, \dots, k_n) \quad 3.2$$

különböző rögzített értékeinél, $k \in (0, 1)$, ha teljesülnek a következő feltételek:

$$g_i(k_1, \dots, k_n, \phi_1(k_1), \dots, \phi_n(k_n)) \leq \xi_i \quad 3.3$$

$$0 \leq k_i \leq 1 \quad i=1, \dots, n \quad 3.4$$

Ha ezt a nemlineáris programozási feladatot megvizsgáljuk, megállapítható, hogy a 3.2 egyenlet egyenlőség típusu határfeltételnek felel meg, ezért a feladat határfeltételei általános esetben nem alkotnak konvex halmazt [46]. Ezért a feladat általános esetben nem konvex nemlineáris programozási feladat egyenlőség és egyenlőtlenség típusu határfeltételekkel. Nem konvex programozási feladat esetén a feladatnak több lokális minimuma lehet és további elemzés szükséges a globális minimum meghatározásához. Esetünkben már magából a feladat megfogalmazásából egyértelműen következik, hogy a feladatnak van globális minimuma.

A 3.1 – 3.4 feladathoz a megoldás következő menetét választottuk: büntető függvények módszerének felhasználásával [16] a korlátos nemlineáris programozási feladatot korlátozás nélküli nemlineáris programozási feladatra vezetjük vissza és a kapott segédfeladatot a büntető koefficiens rögzített értékénél a módosított Newton módszer felhasználásával oldjuk meg [43].

Mivel a büntető függvények módszere a következő alakú nemlineáris programozási feladat megoldására szolgál

keressük $\min f(x)$, $g_j(x) \geq 0$, $j=1, \dots, m$ mellett, ezért a 3.1 – 3.4 feladat határfeltételeit a következő alakra kell hozni

$$\bar{g}_j(k_1, \dots, k_n) \geq 0, \quad j=1, \dots, 3n+2 \quad 3.5$$

ahol

$$\bar{g}_j(k_1, \dots, k_n) = \xi_j - g_j(k_1, \dots, k_n, \phi_1(k_1), \dots, \phi_n(k_n)), \quad j=1, \dots, n \quad 3.6$$

$$\bar{g}_j(k_1, \dots, k_n) = k - f(k_1, \dots, k_n), \quad j=n+1 \quad 3.7$$

$$\bar{g}_j(k_1, \dots, k_n) = -k + f(k_1, \dots, k_n), \quad j=n+2 \quad 3.8$$

$$\bar{g}_j(k_1, \dots, k_n) = k_j, \quad j=n+3, \dots, 2n+2 \quad 3.9$$

$$\bar{g}_j(k_1, \dots, k_n) = 1 - k_j, \quad j=2n+3, \dots, 3n+2 \quad 3.10$$

A 3.7 és 3.8 egyenlőségek a $k=f(k_1, \dots, k_n)$ egyenlőségből adódnak az egyenlőség felírásával $k \geq f(k_1, \dots, k_n)$ és $k \leq f(k_1, \dots, k_n)$ egyenlőtlenségek formájában.

A 3.1 - 3.4 feladatot az átalakított határfeltételekkel büntető függvények módszerével írjuk át korlátozás nélküli segéd feladattá. Erre a célra a következő büntető függvényt használjuk fel.

$$P(k_1, \dots, k_n) = \sum_{j=1}^{3n+2} (\min[\bar{g}_j(k_1, \dots, k_n), 0])^2 \quad 3.11$$

A 3.11 büntető függvény felhasználásával az új függvény

$$C(k_1, \dots, k_n, r) = f(\phi_1(k_1), \dots, \phi_n(k_n)) + \frac{1}{2r} P(k_1, \dots, k_n) \quad 3.12$$

ahol r - adott és rögzített büntető függvény koefficiens.

A 3.12 függvény felhasználásával a 3.1 - 3.4 feladatot a következő segédfeladatra vezetjük vissza:

$$\begin{aligned} &\text{Keressük } \min C(k_1, \dots, k_n, r) \\ &\text{különböző rögzített } k \text{ értékeknél, a } k \in (0, 1). \end{aligned} \quad 3.13$$

Megjegyzés: A 3.13 feladatban az optimumpont meghatározási idejének csökkentése céljából használunk adott rögzített r büntető koefficiensst. Helyes megadása esetén biztosított a 3.13 feladat megfelelő pontosságu megoldása. Az r koefficiens helytelen megadásakor előfordulhat, hogy a felhasznált optimalizálási módszer nem ad megoldást. Ilyen esetben meg kell ismételni a feladat megoldását új r értékekkel.

A 3.13 segédfeladat függvénye nem konvex, ezért választottuk a feladat megoldásához a módosított Newton módszert.

A módosított Newton módszer az általánosított Newton módszerből alakult ki, amely második deriváltak felhasználásán alapul. A Newton módszernek megfelelően az egyik pontból a másikba való áttérés a következő módon határozható meg:

$$\bar{k}^{(i+1)} = \bar{k}^{(i)} - s^{(i)} \frac{w(\bar{k}^{(i)})}{||w(\bar{k}^{(i)})||} \quad 3.14$$

ahol $\bar{k}^{(i)}$ - a minimumpont felé haladás i -edik lépésében kapott pont (k_1, \dots, k_n) koordinátákkal;

$s^{(i)} > 0$ - lépéshossz, melyet úgy határozunk meg, hogy

biztosítsuk $C(\bar{k}, r)$ minimumát a $\frac{w(\bar{k}^{(i)})}{||w(\bar{k}^{(i)})||}$

irányban;

$w(\bar{k}^{(i)})$ - irányvektor;

$\frac{w(\bar{k}^{(i)})}{||w(\bar{k}^{(i)})||}$ - az irányvektor normája.

Az általános Newton módszerben a $w(\bar{k}^{(i)})$ irányvektor meghatározása a következő módon történik

$$w(\bar{k}^{(i)}) \cong H^{-1}(\bar{k}^{(i)}) \nabla C(\bar{k}^{(i)}, r) \quad 3.15$$

ahol $H^{-1}(\bar{k}^{(i)})$ - a $\bar{k}^{(i)}$ pontban vett második deriváltak Hasse mátrixának inverze;

$\nabla C(\bar{k}^{(i)}, r)$ - a 3.13 feladat függvényének gradiense a $\bar{k}^{(i)}$ pontban.

Annak ellenére, hogy az általánosított Newton módszer segítségével kiküszöbölhető a Cauchy módszer több hátránya, maga is két lényeges hiányossággal bír:

- 1.) nem konvex feladatokban nem garantálja a $C(\bar{k}, r)$ függvény monoton csökkenését, ha a $\bar{k}^{(i)}$ pont nincs az optimum pont közelében;
- 2.) a $H(\bar{k})$ mátrix nem mindig invertálható.

A módosított Newton módszer felhasználásakor a fenti hiányosságok kiküszöbölhetők azáltal, hogy a $w(\bar{k}^{(i)})$ irányvektort a $H(\bar{k}^{(i)})$ Hasse mátrix λ_j , $j=1, \dots, n$ sajátértékeitől függően határozzuk meg. Ismert, hogy a $C(\bar{k}, r)$ függvény akkor konvex, ha $H(\bar{k})$ mátrix sajátértékei pozitívek. Erre az esetre alkalmazható az általános Newton módszer. A Hasse mátrixban negatív sajátértékek megjelenése a $C(\bar{k}, r)$ függvény nem konvex voltára utal, nulla sajátértékek pedig a $H(\bar{k})$ mátrix nem invertálhatóságát idézik elő. Ennek figyelembevételével a $w(\bar{k}^{(i)})$ irányvektort a sajátértékektől függően a következőképpen határozzuk meg:

$$a.) \text{ ha } \forall \lambda_j(\bar{k}^{(i)}) > 0, \quad j=1, \dots, n$$

akkor

$$w(\bar{k}^{(i)}) = H^{-1}(\bar{k}^{(i)}) \nabla C(\bar{k}^{(i)}, r) \quad 3.16$$

vagyis ilyenkor az általánosított Newton módszert alkalmazzuk

$$b.) \text{ ha } \exists \lambda_j(\bar{k}^{(i)}) < 0, \quad j=1, \dots, n, \quad \text{akkor}$$

a $w(\bar{k}^{(i)})$ irányvektort úgy kell felvenni, hogy teljesüljön a következő feltétel

$$w(\bar{k}^{(i)}) \nabla C(\bar{k}^{(i)}, r) \geq 0 \quad 3.17$$

Ennek figyelembevételével a $w(\bar{k}^{(i)})$ meghatározására a következő módszert választottuk

$$w(\bar{k}^{(i)}) = \nabla C(\bar{k}^{(i)}, r) + \delta^{(i)} \sum_{j \in \Omega} e_j(\bar{k}^{(i)}) \quad 3.18$$

ahol

$$\delta^{(i)} = \begin{cases} -1 & \text{ha } \nabla C(\bar{k}^{(i)}, r) \cdot \sum_{j \in \Omega} e_j(\bar{k}^{(i)}) < 0 \\ 1 & \text{ha } \nabla C(\bar{k}^{(i)}, r) \cdot \sum_{j \in \Omega} e_j(\bar{k}^{(i)}) \geq 0 \end{cases} \quad 3.19$$

Ω - a $H(\bar{k}^{(i)})$ mátrix negatív sajátértékeihez tartozó indexek halmaza;

$e_j(\bar{k}^{(i)})$ - a $H(\bar{k}^{(i)})$ mátrix negatív sajátértékeinek megfelelő sajátvektorok.

c.) ha $\forall \lambda_j(\bar{k}^{(i)}) \geq 0$ és $\exists \lambda_j(\bar{k}^{(i)}) = 0$, $j=1, \dots, n$ akkor

$$w(\bar{k}^{(i)}) = \tilde{H}^{-1}(\bar{k}^{(i)}) \nabla C(\bar{k}^{(i)}, r) \quad 3.20$$

ahol

$$\tilde{H}_{jj} = H_{jj} + r, \quad j=1, \dots, n$$

$$\tilde{H}_{ij} = H_{ij}, \quad i \neq j, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n$$

H_{ij} - a Hasse mátrix eleme;

r - büntető koefficiens.

Ezzel a módszerrel oldjuk meg a 3.13 segédfeladatot (a megjegyzés figyelembevételével), ezzel meghatározzuk a \bar{k}^* globális minimum pontot, amely biztosítja a $C(\bar{k}, r)$ függvény minimumát. A kapott $\ell = f(\phi_1(k_1^*), \dots, \phi_n(k_n^*))$ koordináta a határgörbe egy pontját határozza meg az adott rögzített k -ra. A $(0, 1)$ intervallumban a k értékének változtatásával néhányszor elvégezzük a 3.13 feladat megoldását különböző adott k értékek esetén. Az így kapott (k, ℓ) pontok megadják a rendszer határgörbét.

2.§. Módszerek az anyagszétválasztási rendszerek határgörbéjének kiszámítási feladatához szükséges célfüggvény és határfeltételek meghatározására.

A 3.1 - 3.4 feladat megoldásához meg kell határozni a feladat célfüggvényét és határfeltételeit. A [41] munkában a szerző módszert ad az f kapcsolati egyenlet meghatározására, ha a szétválasztási rendszert gráffal írjuk le. Nekünk olyan módszert kellett találni, amely lehetővé teszi az f kapcsolati egyenlet és a $g_i, i=1, \dots, n$ határfeltételek meghatározását, ha ismertek a megengedett rendszert leíró gráf piros és kék fájának éllistái. Megfelelő módszernek mutatkozott a megengedett rendszer gráfjának leírása lineáris egyenletrendszer segítségével, ahol az egyenletrendszer az x és y komponensek anyagmérlegeinek felírásából adódik. A lineáris algebrai egyenletrendszert külön-külön írjuk fel az x és y komponensekre a következő formában

$$(I - K)X = X_{be} \quad 3.21$$

$$(I - L)Y = Y_{be} \quad 3.22$$

ahol

X - $n+2$ elemű $X^t = (x_1 x_2 \dots x_{n+2})$ vektor, amelynek i -edik eleme megfelel az x komponens áramának a gráf i -edik csucsának bemenetén, ahol $i=1, \dots, n+2$;

Y - $n+2$ elemű $Y^t = (y_1 y_2 \dots y_{n+2})$ vektor, amelynek i -edik eleme megfelel az y komponens áramának a gráf i -edik csucsának bemenetén, ahol $i=1, \dots, n+2$;

X_{be} - $n+2$ elemű $X_{be}^t = (0 \ 0 \dots x_{be} \dots 0)$ vektor, melynek elemei egyetlen kivételével 0 értékűek. Ez az egyetlen elem egyenlő az x komponens áramával a rendszer bemenetén, így ennek a vektorelemnek az indexe egyenlő a megengedett gráf forrásának indexével, vagyis az index $j=1, \dots, n$ értékeket vehet fel;

Y_{be} - $n+2$ elemű $y_{be}^t = (0 \ 0 \dots y_{be} \dots 0)$ vektor, amelynek elemei az x_{be} vektor elemeivel azonosak azzal a különbséggel, hogy x_{be} helyett y_{be} szerepel, amely egyenlő az y komponens áramával a rendszer bemenetén;

K - $(n+2) \times (n+2)$ -es méretű rendszermátrix, amelynek elemei egyenlők az x komponens kimenetalaival a koncentrációs áramokba és a meddő áramokba, azaz

$$K_{ij} = \begin{cases} k_j & \text{ha szerepel } (ij) \text{ él a piros fa éleinek listájában} \\ 1-k_j & \text{ha szerepel } (ij) \text{ él a kék fa éleinek listájában} \\ 0 & \text{egyéb esetekben} \end{cases}$$

L - $(n+2) \times (n+2)$ -es méretű rendszermátrix, amelynek elemei egyenlők az y komponens kimenetalaival a koncentrációs áramokba és a meddő áramokba, azaz

$$L_{ij} = \begin{cases} l_j & \text{ha szerepel } (ij) \text{ él a piros fa éleinek listájában} \\ 1-l_j & \text{ha szerepel } (ij) \text{ él a kék fa éleinek listájában} \\ 0 & \text{egyéb esetekben} \end{cases}$$

I - $(n+2) \times (n+2)$ -es méretű egység mátrix.

Amint az a K és L mátrixok meghatározásából kitűnik, bennük az elemek elhelyezkedése azonos. Ezenkívül a K és L mátrixok egy sor olyan tulajdonsággal rendelkeznek, amelyek a megengedett gráfok sajátosságaiból fakadnak. Ezek a tulajdonságok a következők:

- 1.) a K és L mátrixok diagonális elemei mindig nullák, mivel a megengedett gráf a csúcsok ugyanazon halmazára felépített két különböző színű fából áll (a gráfban nem fordulhatnak elő hurkok);
- 2.) a $j=1, \dots, n$ oszlopokban egy-egy k_j és $1-k_j$ elem áll a K mátrix esetében, az L mátrix esetében pedig l_j és $1-l_j$ az oszlopok többi

eleme pedig nullával egyenlő, mivel a nyelők kivételével minden csucsból egy-egy piros és kék él lép ki;

- 3.) a $j=n+1$, $n+2$ oszlopok elemei nullával egyenlők, mivel a nyelőkből nem lépnek ki élek;
- 4.) a j -edik oszlopban, $j=1, \dots, n$, a k_j és $1-k_j$ elemeknek a sorindexe nem lehet azonos, mivel a második megengedettségi feltétel értelmében (ij) él listájában;
- 5.) a K mátrix $n+1$ -edik sorában csak k_j elemek, az $n+2$ sorában pedig csak $1-k_j$ elemek állhatnak, mivel az $n+1$ -es indexű nyelőbe csak piros élek léphetnek be, az $n+2$ -es indexű nyelőkbe pedig csak kék élek;
- 6.) ha $K_{ij}=1-k_j$, akkor $K_{ji} \neq 1-k_i$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$, vagy ha $K_{ij}=k_j$, akkor $K_{ji} \neq k_i$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$, mivel a gráf két fából áll, amelyek a csucskok ugyan azon halmazára épülnek (a gráfban nem fordulhatnak elő körök);
- 7.) ha $K_{ij}=k_j$ és $K_{hj}=1-k_j$, akkor $K_{ih} \neq 1-k_h$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$, $h=1, \dots, n$, mivel teljesülnie kell a megengedettség második feltételének (ez a tulajdonság érvényben marad az élek színeinek felcserélésekor).

Vizsgáljuk meg a 14. ábrán bemutatott példát. Az adott megengedett szétválasztási rendszert a

$$\begin{bmatrix} 43 \\ 32 \\ 21 \end{bmatrix}$$

éllistá-

ju piros fa, az

$$\begin{bmatrix} 51 \\ 12 \\ 23 \end{bmatrix}$$

éllistáju kékfa és az

1-es indexű forrás írja le. Ebben az esetben a 3.21 és 3.22 lineáris algebrai egyenletrendszerek a következő módon írhatók fel

$$\begin{pmatrix} 1 & k_2-1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 1 & k_3-1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & 0 \\ k_1-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{be} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & l_2-1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1 & 1 & l_3-1 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_3 & 1 & 0 \\ l_1-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{be} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tegyük fel, hogy $x_{be}=1$ és $y_{be}=1$. Ekkor az n elemből álló szétválasztási rendszer határgörbájének meghatározására felírt 3.1 - 3.4 feladat a következő alakot veszi fel:

$$\begin{aligned} \text{Keressük } \min l &= y_{n+1} - t, \\ \text{a } k &= x_{n+1} \end{aligned}$$

különböző rögzített értékeinél, $k \in (0,1)$, ha teljesülnek a következő feltételek:

$$\begin{aligned} g_i &= x_i + y_i \leq \xi_i \\ 0 &\leq k_i \leq 1 \end{aligned} \quad i=1, \dots, n$$

és figyelembe véve, hogy adottak az

$$l_i = \phi_i(k_i), i=1, \dots, n$$

függvények.

A fentiekből látható, hogy a megengedett szétválasztási rendszert leíró gráf által meghatározott 3.21 és 3.22 lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával előállíthatók az adott megengedett rendszer határgörbéjének meghatározására szolgáló feladat célfüggvénye és határfeltételei. A bemutatott módszer segítségével egyszerű algoritmust kaptunk a nemlineáris programozási feladat meghatározására egy-egy megengedett rendszer generálása után. Ezen algoritmus segítségével a generáláskor kapott éllisták és forrás felhasználásával meghatározzuk a 3.21 és 3.22 egyenletrendszereket. Az egyenletrendszerek megoldásával kapott x_i és y_i , $i=1, \dots, n+2$, értékek határozzák meg a határgörbe kiszámítására szolgáló feladat célfüggvényét és határfeltételeit.

Külön foglalkoztunk az f célfüggvény és a g_i , $i=1, \dots, n$ határfeltételek meghatározásával az alapkapsolásokból kompozícióval felépíthető rendszerek esetén. Az I. fejezetben meghatároztuk az alapkapsolások kapcsolati egyenletét és az i -edik elemére vonatkozó cirkulációt, ezeket összegyűjtjük az 1. táblázatban. A táblázatban a felső indexek az alapkapsolás sorszámát jelölik. Kompozíciós rendszerek kialakításakor a kompozíciók három típusa jöhet létre:

- 1.) $(a \square (b \square c))$ $a=1, \dots, n$, $b=1, \dots, n$,
 $c=1, \dots, n$, $d=1, \dots, n$
- 2.) $((a \square b) \square c)$ $a \neq b \neq c \neq d$
- 3.) $((a \square b) \square (c \square d))$

ahol

a, b, c, d - az elemek indexe a rendszerben,

\square - $a \Rightarrow$, \rightarrow , \Leftarrow , \leftarrow 4 műveleti jel egyike.

A kompozíciók fenti három típusa esetében a kapcsolati egyenletekre és a cirkulációs áramokra vonatkozó korlátozások az alapkapcsolások megfelelő függvényeiből képzett összetett függvények (függvény kompozíciók) formájában határozhatók meg [33].

Ezek a függvények $(a \square (b \square c))$ típusu kompozíciók esetében

$$\begin{aligned} k &= f^i(k_a, f^j(k_b, k_c)) \\ \xi_a &\geq g_1^i(k_a, f^j(k_b, k_c)) + g_1^i(l_a, f^j(l_b, l_c)) \\ \xi_b &\geq g_2^i(k_a, f^j(k_b, k_c)) \cdot g_1^j(k_b, k_c) + g_2^i(l_a, f^j(l_b, l_c)) \cdot g_1^j(l_b, l_c) \\ \xi_c &\geq g_2^i(k_a, f^j(k_b, k_c)) \cdot g_2^j(k_b, k_c) + g_2^i(l_a, f^j(l_b, l_c)) \cdot g_2^j(l_b, l_c) \end{aligned}$$

3.23

$((a \square b) \square c)$ típusu kompozíciók esetén

$$\begin{aligned} k &= f^i(f^j(k_a, k_b), k_c) \\ \xi_a &\geq g_1^i(f^j(k_a, k_b), k_c) \cdot g_1^j(k_a, k_b) + g_1^i(f^j(l_a, l_b), l_c) \cdot g_1^j(l_a, l_b) \\ \xi_b &\geq g_1^i(f^j(k_a, k_b), k_c) \cdot g_2^j(k_a, k_b) + g_1^i(f^j(l_a, l_b), l_c) \cdot g_2^j(l_a, l_b) \\ \xi_c &\geq g_2^i(f^j(k_a, k_b), k_c) + g_2^i(f^j(l_a, l_b), l_c) \end{aligned}$$

3.24

$((a \square b) \square (c \square d))$ típusu kompozíciók esetén

$$\begin{aligned} k &= f^i(f^j(k_a, k_b), f^m(k_c, k_d)) \\ \xi_a &\geq g_1^i(f^j(k_a, k_b), f^m(k_c, k_d)) \cdot g_1^j(k_a, k_b) + \\ &\quad + g_1^i(f^j(l_a, l_b), f^m(l_c, l_d)) \cdot g_1^j(l_a, l_b) \\ \xi_b &\geq g_1^i(f^j(k_a, k_b), f^m(k_c, k_d)) \cdot g_2^j(k_a, k_b) + \\ &\quad + g_1^i(f^j(l_a, l_b), f^m(l_c, l_d)) \cdot g_2^j(l_a, l_b) \\ \xi_c &\geq g_2^i(f^j(k_a, k_b), f^m(k_c, k_d)) \cdot g_1^m(k_c, k_d) + \\ &\quad + g_2^i(f^j(l_a, l_b), f^m(l_c, l_d)) \cdot g_1^m(l_c, l_d) \end{aligned}$$

$$\xi_d \geq g_2^i(f^j(k_a, k_b), f^m(k_c, k_d)) \cdot g_2^m(k_c, k_d) + \\ + g_2^i(f^j(l_a, l_b), f^m(l_c, l_d)) \cdot g_2^m(l_c, l_d)$$

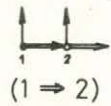
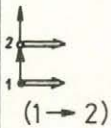
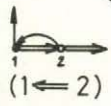
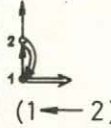
3.25

ahol $i=1, \dots, 4$, $j=1, \dots, 4$, $m=1, \dots, 4$ - az alapkapsolások sorszámai.

Kompozíciós rendszerek esetében a célfüggvény és a határfeltételek függvény kompozícióként való meghatározásakor feltételezzük, hogy a kompozíció struktúrája adott. Ezért ez a módszer előre megadott rendszer határgörbéjének meghatározására használható, ha a rendszer adott struktúrájú kompozícióként írható fel. Tehát, ez a módszer a megengedett szétválasztási rendszerek generálásakor közvetlenül nem használható. Adott struktúrájú kompozíciós rendszer számára az f célfüggvényt és a g_i , $i=1, \dots, n$ határfeltételeket előre fel tudjuk írni a fentiekben bemutatott módszer segítségével.

Az adott módszer lehetővé teszi a $k=f(k_1, \dots, k_n)$ egyenlőség típusú határfeltétel kizárását a határfeltételek közül az egyenlőségből k_1 vagy k_n kifejezésével és behelyettesítésével a célfüggvénybe és a többi határfeltételbe. Ez az átalakítás is felírható ϕ^i vagy ρ^i , $i=1, \dots, 4$ függvények kompozíciójával (a ϕ^i és ρ^i függvényeket is felsoroltuk az 1. táblázatban)

1. táblázat

Alapkap - csolás és szimbolikus jelölése	Kapcsolati egyenlet	Cirkulációk		k_1 kifejezés	k_2 kifejezés
		1. elemre vonatkozó	2. elemre vonatkozó		
	$f^1(k_1, k_2) = k_1 \cdot k_2$	$g_1^1 = 2$	$g_2^1 = k_1 + l_1$	$k_1 = \varphi^1(k_1, k_2) = \frac{k}{k_2}$	$k_2 = \vartheta^1(k_1, k) = \frac{k}{k_1}$
	$f^2(k_1, k_2) = k_1 + k_2 - k_1 \cdot k_2$	$g_1^2 = 2$	$g_2^2 = 1 - k_1 + 1 - l_1$	$k_1 = \varphi^2(k_1, k_2) = \frac{k - k_2}{1 - k_2}$	$k_2 = \vartheta^2(k_1, k) = \frac{k - k_1}{1 - k_1}$
	$f^3(k_1, k_2) = \frac{k_1 \cdot k_2}{1 - k_1(1 - k_2)}$	$g_1^3 = \frac{1}{1 - k_1(1 - k_2)} + \frac{1}{1 - l_1(1 - l_2)}$	$g_2^3 = \frac{k_1}{1 - k_1(1 - k_2)} + \frac{l_1}{1 - l_1(1 - l_2)}$	$k_1 = \varphi^3(k_1, k_2) = \frac{k}{k - k_2(1 - k)}$	$k_2 = \vartheta^3(k_1, k) = \frac{k(1 - k_1)}{k_1(1 - k)}$
	$f^4(k_1, k_2) = \frac{k_1}{1 - (1 - k_1)k_2}$	$g_1^4 = \frac{1}{1 - (1 - k_1)k_2} + \frac{1}{1 - (1 - l_1)l_2}$	$g_2^4 = \frac{1 - k_1}{1 - (1 - k_1)k_2} + \frac{1 - l_1}{1 - (1 - l_1)l_2}$	$k_1 = \varphi^4(k_1, k_2) = \frac{k(1 - k_2)}{1 - k_2}$	$k_2 = \vartheta^4(k_1, k) = \frac{k - k_1}{k(1 - k_1)}$

$(a \square (b \square c))$ típusu kompozíciók esetén

$$\text{ha } k = f^i(k_a, f^j(k_b, k_c)),$$

$$k_a = \phi^i(k, f^j(k_b, k_c)) \quad 3.26$$

$$k_c = \rho^i(k_b, \rho^i(k_a, k))$$

$((a \square b) \square c)$ típusu kompozíciók esetén

$$\text{ha } k = f^i(f^j(k_a, k_b), k_c),$$

$$k_a = \phi^i(\phi^i(k, k_c), k_b) \quad 3.27$$

$$k_c = \rho^i(f^j(k_a, k_b), k)$$

$((a \square b) \square (c \square d))$ típusu kompozíciók esetén

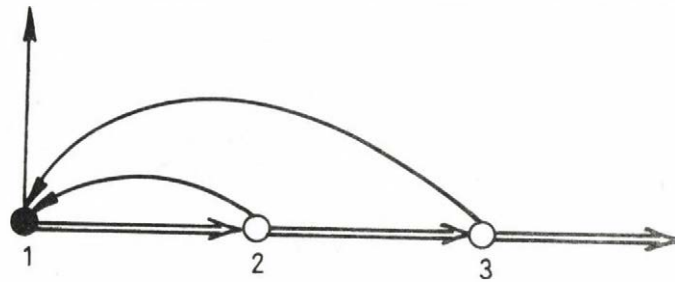
$$\text{ha } k = f^i(f^j(k_a, k_b), f^m(k_c, k_d)),$$

$$k_a = \phi^i(\phi^i(k, f^m(k_c, k_d)), k_b) \quad 3.28$$

$$k_d = \rho^m(k_c, \rho^i(f^j(k_a, k_b), k))$$

A k_a vagy $k_c(k_d)$ értékére kapott kifejezés behelyettesítése a célfüggvénybe és a g_i , $i=1, \dots, n$ határfeltételekbe eggyel csökkenti a feladatban a változók számát.

Vizsgáljuk meg az adott módszer alkalmazását a 20. ábrán bemutatott példán.



20. ábra.

Az adott rendszer kompozíciós rendszer, melynek
strukturája $((1 \leq 2) \leq 3)$. A rendszer határgörbéjének
meghatározásához a célfüggvény

$$l = f^3(f^3(l_1, l_2), l_3)$$

a határfeltételek pedig

$$k = f^3(f^3(k_1, k_2), k_3)$$

$$\xi_{1 \geq} g_1^3(f^3(k_1, k_2), k_3) \cdot g_1^3(k_1, k_2) +$$

$$+ g_1^3(f^3(l_1, l_2), l_3) \cdot g_1^3(l_1, l_2)$$

$$\xi_{2 \geq} g_1^3(f^3(k_1, k_2), k_3) \cdot g_2^3(k_1, k_2) + g_1^3(f^3(l_1, l_2), l_3) \cdot g_2^3(l_1, l_2)$$

$$\xi_{3 \geq} g_2^3(f^3(k_1, k_2), k_3) + g_2^3(f^3(l_1, l_2), l_3)$$

Kifejezzük az egyenlőség típusú határfeltételből k_1 -et

$$k_1 = \phi^3(\phi^3(k, k_3), k_2)$$

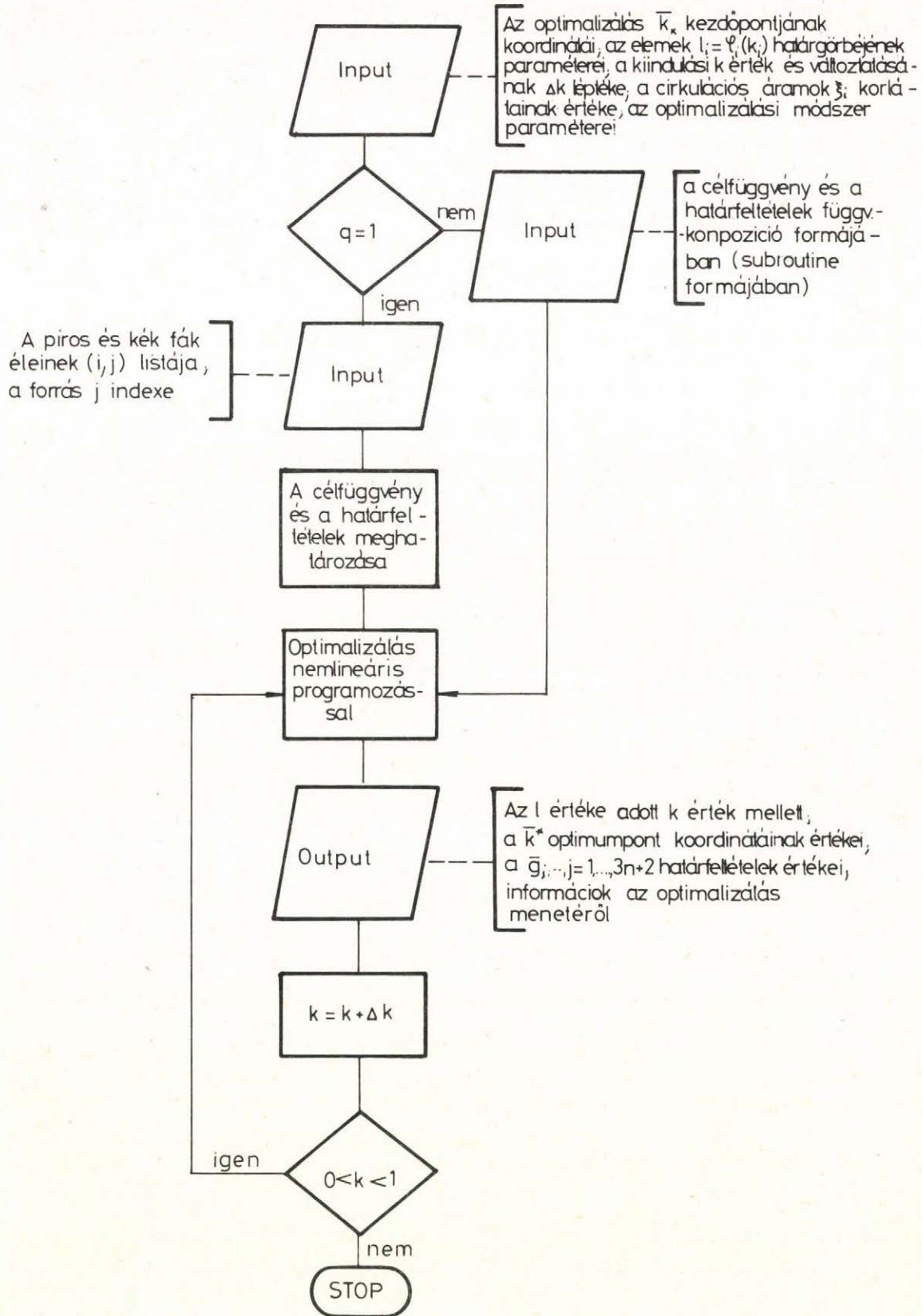
Figyelembe véve, hogy $\ell_i = \phi_i(k_i), i=1,2,3$, valamint k_1 -et behelyettesítve a célfüggvénybe és az egyenlőtlenség típusu határfeltételekbe, azok a k, k_2 és k_3 függvényei lesznek, vagyis kétváltozós optimalizálási feladatot kaptunk a k_2 és k_3 változókkal k különböző rögzített értékeinél, ahol $k \in (0,1)$.

3.§. A határgörbék meghatározására szolgáló módszer számítógépes realizációja. A feladat sajátosságai.

Az anyagszétválasztási rendszerek határgörbéjének meghatározására szolgáló algoritmus számítógépes realizációjakor felhasználtunk egy kész program modult, amely a nemlineáris programozásifeladat megoldását végzi módosított Newton módszerrel. A program modult A.E. Umnov, a Moszkvai Műszaki-Fizikai Intézet munkatársa dolgozta ki. A program modulban a feladat sajátosságainak figyelembevételével változtatásokat végeztünk. A határgörbe meghatározására szolgáló programot FORTRAN-IV nyelven készítettük a moszkvai Irányítási Problémák Intézetének ICL 470-es számítógépére. A program modulus felépítésű (subroutine) és a GRAPH nevű programcsomag részét képezi.

A határgörbe meghatározására szolgáló program blokk-vázlata a 21. ábrán látható.

A program a következőképpen működik.



21. ábra

1. lépés. Input adatként a következő értékek kerülnek bevitelre:

- az optimalizálás \bar{k}_k kezdőpontjának koordinátái;
- az elemek $\lambda_i = \phi_i(k_i)$, $i=1, \dots, n$ határgörbájének paraméterei;
- a kiindulási rögzített k érték és változtatásának Δk léptéke;
- a cirkulációs áramok ξ_i , $i=1, \dots, n$ korlátainak értéke;
- az optimalizálási módszer paraméterei

2. lépés. Meghatározásra kerülnek az optimalizálási feladat célfüggvénye és határfeltételei a q paraméternek megfelelően, ahol a q paraméter adatként bevitt vezérlőparaméter, ha

$q=1$ - a célfüggvény és a határfeltételek lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldásával kerülnek meghatározásra,

$q \neq 1$ - a célfüggvény és a határfeltételek függvény kompozícióként kerülnek meghatározásra.

3. lépés. Megoldásra kerül a nemlineáris programozási feladat a módosított Newton módszer felhasználásával. Az optimalizálás következő eredményei kerülnek kinyomtatásra

- az ℓ célfüggvény értéke az optimum pontban
- a k^* optimum pont koordinátáinak értékei
- a \bar{g}_j , $j=1, \dots, 3n+2$ határfeltételek értékei;
- információk az optimalizálás végrehajtásáról.

4. lépés. Meghatározásra kerül k következő rögzített értéke, mégpedig $k=k+\Delta k$, majd ellenőrizzük, hogy k új értéke nem lépett-e ki a $(0,1)$ intervallumból, ha

$k \in (0,1)$ - ugrás a 3. lépésre,

$k \notin (0,1)$ - stop.

A globális optimum pont helyének meghatározása céljából megvizsgáltuk a 20. ábrán bemutatott konkrét példa felhasználásával az optimalizálási segédfeladat $C(k_1, \dots, k_n, r)$ függvényének szintvonalait. Szintvonalon a pontok azon halmazát értjük, amelyben a függvény állandó értéket vesz fel. A vizsgálat tárgyát képező függvényként a $C(k, k_2, k_3, r)$ függvényt használtuk fel, vagyis azt, amely a k_1 változó kizárásával keletkezik. A szétválasztó elemek határgörbéjeként az
$$\rho_i = \frac{S_i k_i}{1 - k_i(1 - S_i)}, \quad i=1, 2, 3$$
 függvényeket vettük

fel, amelyeknek határgörbéként való felhasználását a [41] munka indokolja. A határgörbék paramétereiként a következő konkrét értékeket vettük fel: $S_1=0,5$, $S_2=0,4$, $S_3=0,3$, a cirkulációs áramok korlátainak értéke: $\xi_1=\xi_2=\xi_3=10,0$, a rögzített k érték: $k=0,5$, a büntető koeficiens értéke pedig $r=0,01$. A k_2, k_3 koordinátarendszerben kapott szintvonalakat a 22. ábra szemlélteti.

A latin ABC betűi közül az A-tól M-ig terjedő betűket használtuk fel a $C(k, k_2, k_3, r)$ adott változási intervallumban az egyes szintek középértékeinek jelölésére. Változási intervallumként $[0, 15]$ -es intervallumot adtunk meg. A 9-es számok a függvény által meghatározott felületen kívül elhelyezkedő tartományt jelentik. Az ábra alapján a következő megállapítások tehetők:

- az aktivizálandó határfeltétel egy meredek felületrész megjelenését eredményezi a $C(k, k_2, k_3, r)$ függvény által meghatározott felületen (a 9-esek területének kihuzott széle);
- a felület alsó része lapos (az A, B, k betűkkel megadott tartományok);
- a büntető függvények módszerének alkalmazása miatt a megengedett tartományon kívül parazita optimumok jelennek meg hosszú keskeny árkok formájában (a $k_2=0$ és $k_3=0$ mentén bekeretezett tartományok);

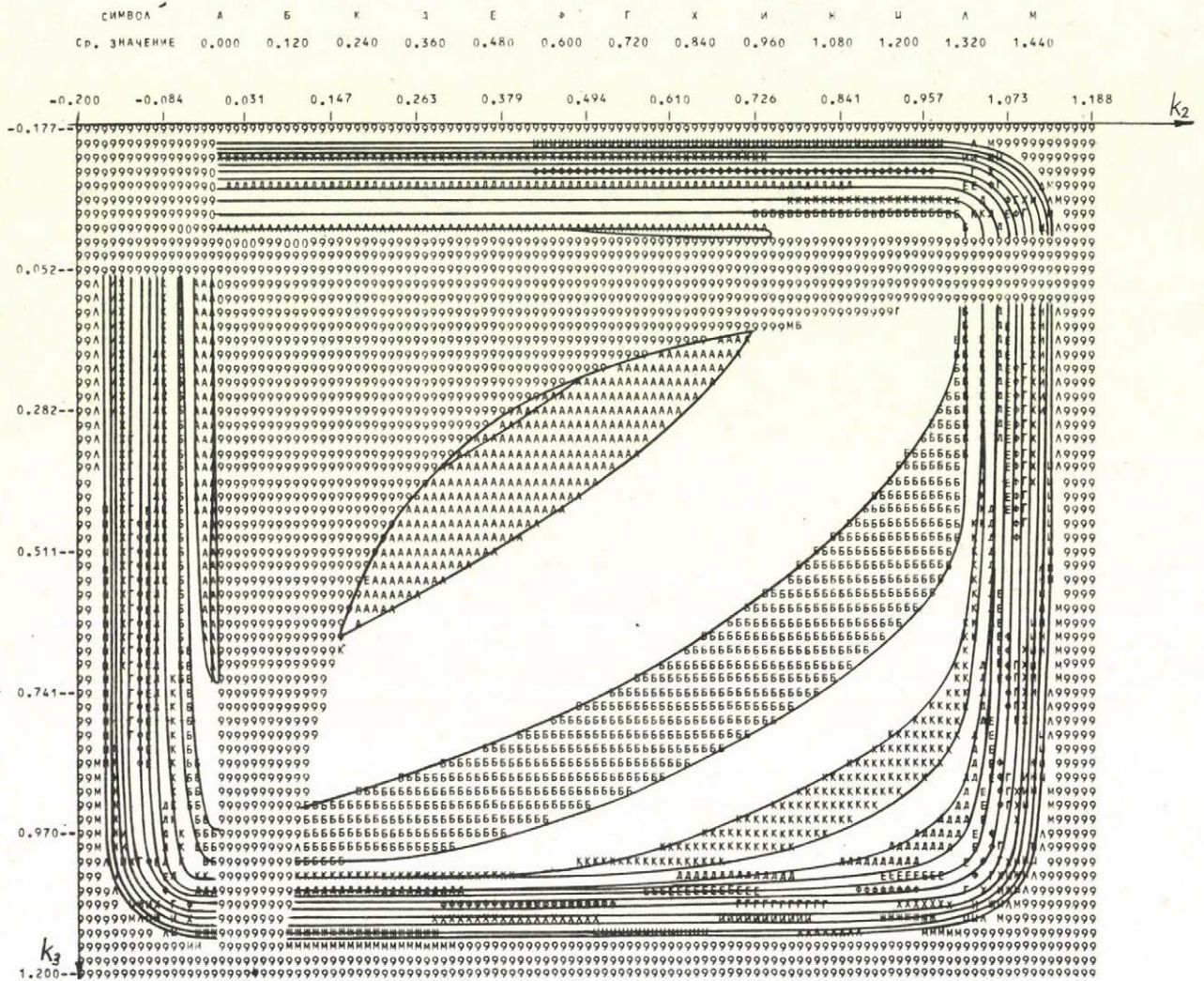
ФОРТРАН ИВ ПРОГРАМ ГРАФИК (КОМПЛЕКТ АС А902ГАА11011) СТАРТЕД 16/05/77.

СИСТЕМА ИЗОЛИНИИ

ШАГ ПО k_2 1.157024E-02

ШАГ ПО k_3 2.295081E-02

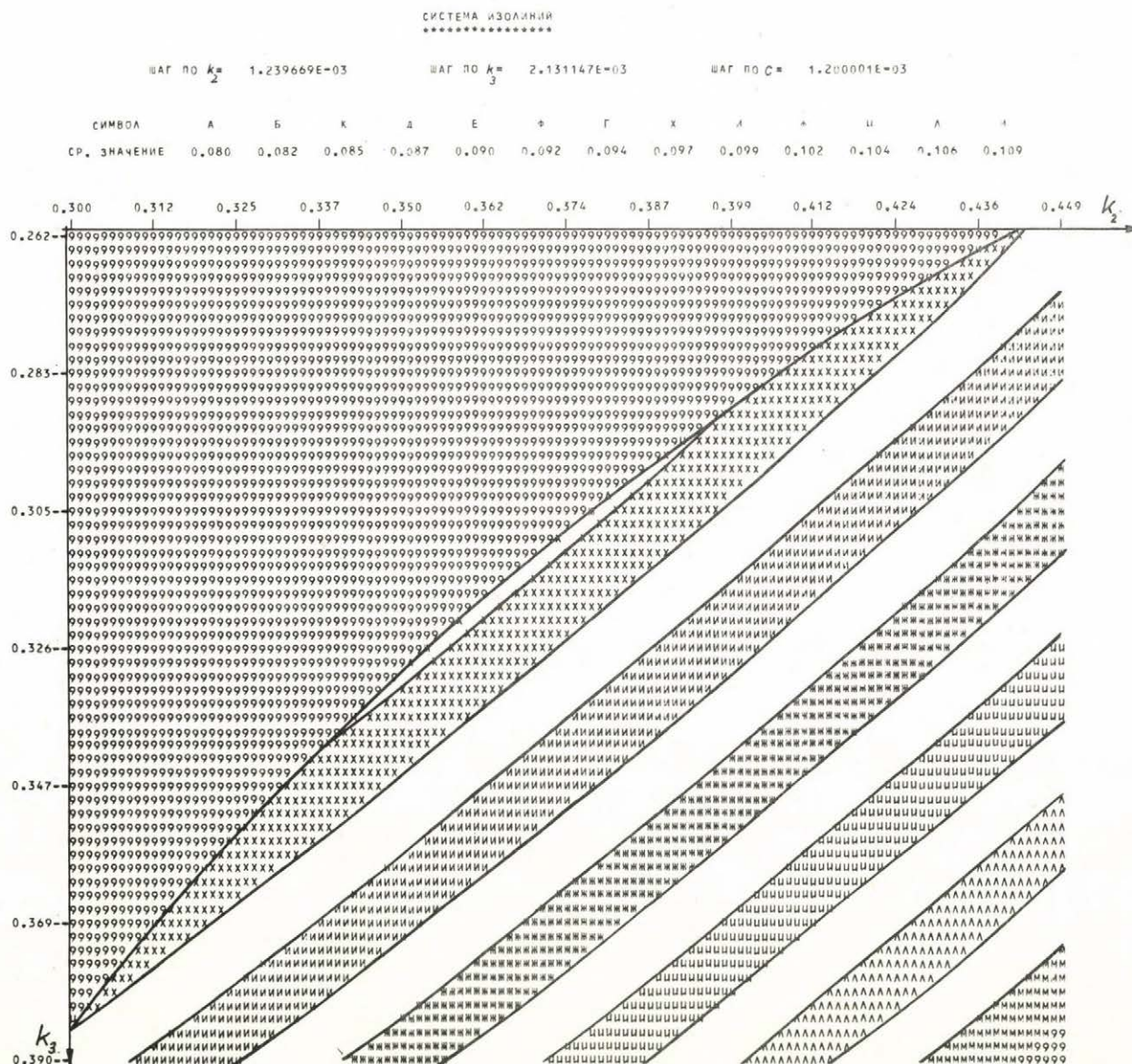
ШАГ ПО C= 6.000000E-02



22. ábra

- a globális optimum pont az aktiv határfeltétel által meghatározott meredek felületrész határán helyezkedik el (az A szint sávjában bekeretezett tartományban). Kinagyítva is megvizsgáltuk a globális optimum pontot magába foglaló tartományt (23. ábra).

ОРТРАН ИВ ПРОГРАМ ГРАФИК (КОМПОНЕНТ АС А902ГАА1101Н) СТАРТЕД 17/05/77.



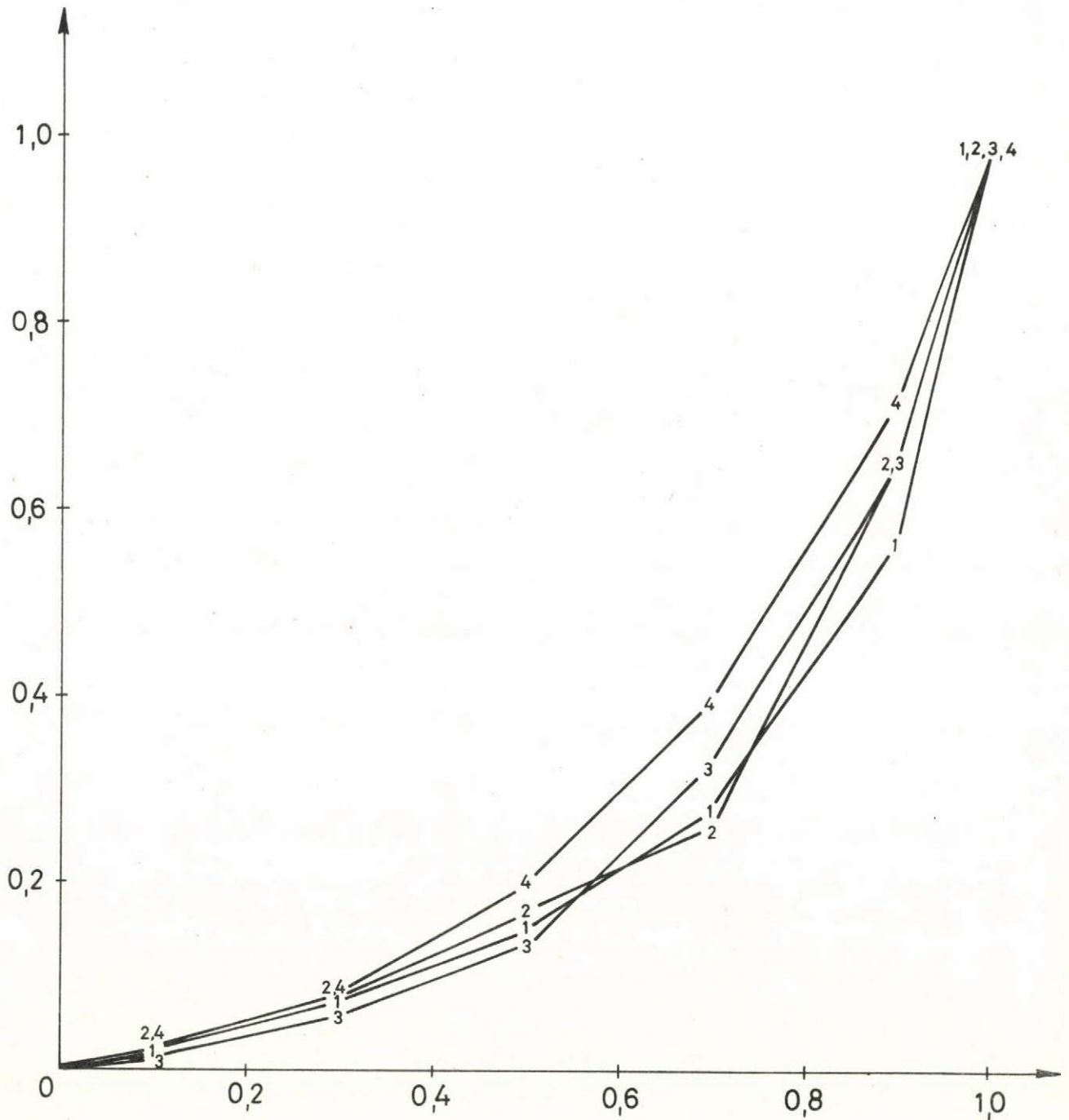
23. ábra

Ebből az ábrából a következő megállapítások tehetők:

- a globális optimum pont a felület hosszú lapos alsó részén kelyezkedik el, ezért
- a \bar{k}^* globális optimum pont érzéketlen a k_2 és k_3 koordináták változásaira azok meglehetősen nagy változási intervallumában.

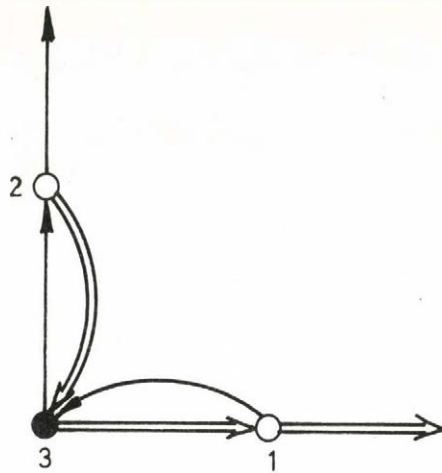
A szintvonalak vizsgálatából következik, hogy a globális optimum ponthoz való biztonságos közelítés érdekében \bar{k}_k kezdőpontként olyanpontot kell választani, amelynek koordinátái egyhez közeliak. Esetünkben ajánlatos $k_{2k}=0,99$, $k_{3k}=0,99$ értéket felvenni. $k_{2k}=1$ és $k_{3k}=1$ felvétele az f kapcsolati egyenlet és a g_i , $i=1, \dots$, határfeltételeket leíró racionális törtfüggvények nevezőjében nulla megjelenését okozza, ezért nem engedélyezett. Ha kezdőpontként $k_{2k}=k_{3k}=0$ értéket veszünk fel, akkor az aktiv határfeltétel által okozott meredek fal miatt a módszer nem a globális optimumot találja meg, hanem a közelebb eső lokális (parazita) optimumot. A soronkövetkező rögzített $k=k+\Delta t$ értéknél a globális optimum pont meghatározására új kezdőpontként az előző rögzített k értéknél kapott \bar{k}^* optimum pontot használjuk fel. Általában k értékének növelésekor az aktiv határfeltétel által létrehozott meredek felületrész a \bar{k} pont koordinátáinak növekedése irányában mozdul el. Ez azt jelenti, hogy ha a határgörbét a k növelésével építjük fel, akkor minden egymást követő optimalizálás kezdőpontja a meredek felületrészen kívülre kerül, a felületrészen való átjutás vagy nem következik be, vagy túl sok iterációs lépést igényel. Ezért, az esetek tulnyomó többségében az $\ell=\phi(k)$ határgörbe felépítését maximális k érték megadásával kell kezdeni (közel egyhez) a továbbiakban fokozatosan csökkentve. Tehát k változtatására negatív léptéket, $-\Delta k$ -t kell használni. Bizonyos esetekben k növelésével a meredek felületrész a \bar{k} pont koordinátáinak csökkenése irányában mozdul el. Ilyen esetben, ha maximális k értéktől annak fokozatos csökkentésével építjük fel a határgörbét, akkor az előbbiekhez hasonló okok miatt a globális optimum helyett az egyik lokális op-

timumba jutunk. Erre utal a kapott határgörbe konvexitásának hiánya. Ilyen esetekben a határgörbét újból fel kell építeni, meghatározását a minimális k értékkel kell kezdeni s a továbbiakban növelni kell értékét (vagyis pozitív Δk léptéket kell felvenni).



24/a. ábra.

A 24/a. ábrán bemutatjuk a megengedett rendszer határgörbáját, ahol a megengedett rendszert három elemből álló rendszerek generálásával kapott rendszerek közül választottuk ki. Elvégeztük a három elemből álló 186 megengedett szétválasztási rendszer közül az első 54 határgörbéinek meghatározását és összehasonlítását. A kapott és plotter segítségével kirajzolt határgörbék összehasonlításával megállapítottuk, hogy a 16. rendszer (24. ábra) határgörbéje helyezkedik el legalacsonyabban a többihez képest, vagyis a vizsgálat tárgyát képező 54 megengedett szétválasztási rendszer közül a 16. rendszer a legjobb.



24. ábra.

A rendszerek határgörbéjének meghatározásához az elemek határgörbéjeként $\ell_i = \frac{S_i k_i}{1 - k_i(1 - S_i)}$, $i=1,2,3$ alakú

függvényeket alkalmaztunk. \bar{k}_k kezdőpontként $k_{1k}=0,99$, $k_{2k}=0,99$, $k_{3k}=0,99$ koordinátájú pontot vettünk fel. A következő paraméterekkel dolgoztunk: $S_1=0,5$, $S_2=0,4$, $S_3=0,3$, $\xi_1=10,0$, $\xi_2=10,0$, $\xi_3=10,0$.

Az optimalizálást öt rögzített k értékre végeztük el, ezek 0,9; 0,7; 0,5; 0,3; 0,1. Az 54 rendszer közül 3 esetére

kellett megismételni a határgörbe kiszámítását $k=0,1$ -el kezdve a meghatározást és $\Delta k=0,2$ -vel növelve k értékét.

A generált megengedett szétválasztási rendszerek határgörbéinek egymás utáni meghatározásakor a következő engedményeket tettük:

- feltettük, hogy a rendszerstruktúra megváltozásakor a rendszert alkotó elemek határgörbéi nem változnak;
- feltettük, hogy a rendszerstruktúra változásakor az elemek bemenetén meghatározott cirkulációs áramokra tett korlátozások nem változnak.

A gyakorlatban a szétválasztó elem határgörbéje az elem teljesítőképességének, az elem bemenetén az anyagáram összetételének megváltozásakor szintén változik. A rendszer strukturájának változásakor ezek a tényezők megváltoznak, tehát változik az elem határgörbéje is. Az elem határgörbéjének változását nagyon bonyolult figyelembe venni a rendszerstruktúra változásakor, s csak tovább bonyolítja az amugyis bonyolult módszert a rendszer határgörbéjének meghatározására. Az elem határgörbéjének megváltozását nem az általános esetben javasoljuk figyelembe venni, hanem az egyértelműen rosszabb rendszerek kiszűrése után. Az adott probléma megoldását e munka folytatásaként javasoljuk. Az a feltételezés, hogy az i -edik, $i=1, \dots, n$ elem bemenetére vonatkozó cirkulációs áram korlátozása nem változik a rendszer strukturájának változásakor jobban megközelíti a valóságot, ha a korlátok ξ_i , $i=1, \dots, n$ értékeként a maximálisan lehetséges értékeket adjuk meg.

Három elemből álló rendszer határgörbéjének meghatározásakor öt pont kiszámítása átlagosan 45 sec gépidőt vett igénybe. Ez azzal magyarázható, hogy a módosított Newton módszer nem tartozik a gyors módszerek közé az első és második deriváltak analitikus kiszámítása miatt az egyes pontokban. Megpróbáltunk a módosított Newton módszer helyett a Nelder és Mead módszer [46] alkalmazásával, amikor határfeltétel nélküli feladathoz a csuszó illesztések módszerének fel-

használásával jutunk el [46]. Ecélből a határgörbe meghatározási feladat sajátosságainak megfelelően átalakítottuk és felhasználtuk a [46]-ban közölt Paviani és Himmelblau által kidolgozott FLEXIPLEX nevű programot. A határgörbe 5 pontjának kiszámításához három elemből álló rendszerek esetén átlagosan 2,5-szer több időre volt szükség, mint a módosított Newton módszer felhasználásakor. Napjainkban a nemlineáris programozási módszerek gyorsan fejlődnek, amely lehetővé teszi, hogy a módosított Newton módszert gyorsabb módszerrel tudjuk felcserélni.

4.§. A szétválasztási rendszerek határgörbéjének meghatározási feladata, mint geometriai programozási feladat

A szétválasztási rendszerek határgörbéjének meghatározására szolgáló feladatnak nemlineáris programozási feladatként való megfogalmazásakor megállapítottuk, hogy az f cél-függvény és a g_i , $i=1, \dots, n$ határfeltételek racionális tört függvények. Ez a tény sugallta, hogy a határgörbe meghatározási feladat geometriai programozási feladatként is felírható.

A geometriai programozás módszerét először Duffin, Peterson és Zener dolgozta ki [10]. Az általuk javasolt módszereknek a feladatok szélesebb osztályára való kiterjesztése érdekében Passy és Wilde javasolta az általánosított geometriai programozás módszerét [52]. Ez a módszer a későbbiekben továbbfejlődött és jelenleg signominális programozás néven ismert [51].

Felírjuk a signominális programozás feladatát és megmutatjuk, hogy a szétválasztási rendszerek határgörbéjének meghatározása a signominális programozási feladat megoldására vezethető vissza.

A geometriai programozás signominális primál feladata a következőképpen fogalmazható meg:

$$\text{Keressük } \begin{matrix} \min \\ \text{vagy} \\ \max \end{matrix} g_0(x), \text{ ahol } x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 3.29$$

a következő korlátozások mellett

$$\text{ahol } \begin{matrix} g_j(x) \leq 1, \\ x_i \geq 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{vagy} \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3.30 \\ 3.31 \end{matrix}$$

és minden g függvény a következő alakú

$$g_j = \sum_{t=1}^{T_j} \sigma_{jt} C_{jt} \prod_{i=1}^n x_i^{a_{jti}} \quad 3.32$$

ahol $C_{jt} > 0$, $j=0, \dots, m$, $t=1, \dots, T_j$ - a g_j függvény tagját alkotó polinomok pozitív együtthatója;

$\sigma_{jt} = \pm 1$, $j=0, \dots, m$, $t=1, \dots, T_j$ - a polinom előjelét meghatározó tényező;

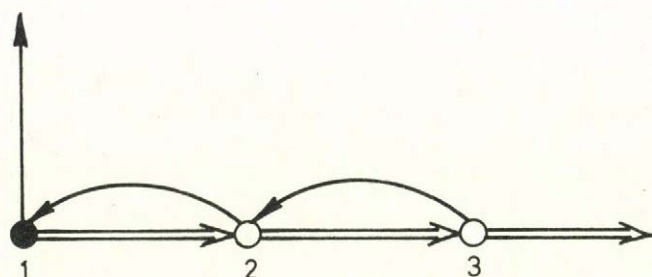
a_{jti} , $j=0, \dots, m$, $t=1, \dots, T_j$, $i=1, \dots, n$ - tetszőleges valós számok, a polinom tényezőinek hatványkitevői;

T_j - a g_j , $j=0, \dots, m$, függvények tagjainak száma;

n - a változók száma;

m - a határfeltételek száma.

A szemléletesség kedvéért a 25. ábrán látható konkrét rendszer esetében vizsgáljuk meg, hogy hogyan hozható a rendszer határgörbájének meghatározási feladata a fentiekben felírt signominális programozás alakjára.



25. ábra.

Az adott szétválasztási rendszer határgörbéjének meghatározási feladata a következőképpen írható fel:

$$\text{Keressük } \min l, \text{ ahol } l = \frac{l_1 l_2 l_3}{1 - l_1 - l_2 + l_1 l_2 + l_2 l_3} \quad 3.33$$

$$k = \frac{k_1 k_2 k_3}{1 - k_1 - k_2 + k_1 k_2 + k_2 k_3} \quad 3.34$$

különböző rögzített értékeinél $k \in (0, 1)$ intervallumból a következő határfeltételek teljesítése mellett

$$\xi_1 \geq \frac{1 - k_2 + k_2 k_3}{1 - k_1 - k_2 + k_1 k_2 + k_2 k_3} + \frac{1 - l_2 - l_2 l_3}{1 - l_1 - l_2 + l_1 l_2 + l_2 l_3} \quad 3.35$$

$$\xi_2 \geq \frac{k_1}{1 - k_1 - k_2 + k_1 k_2 + k_2 k_3} + \frac{l_1}{1 - l_1 - l_2 + l_1 l_2 + l_2 l_3} \quad 3.36$$

$$\xi_3 \geq \frac{k_1 k_2}{1 - k_1 - k_2 + k_1 k_2 + k_2 k_3} + \frac{l_1 l_2}{1 - l_1 - l_2 + l_1 l_2 + l_2 l_3} \quad 3.37$$

$$0 \leq k_i \leq 1 \quad i=1, 2, 3 \quad 3.38$$

ha a rendszert alkotó elemek határgörbéi

$$\ell_i = \frac{S_i k_i}{1 - k_i(1 - S_i)} , \quad i=1,2,3 \quad 3.39$$

függvények alakjában adóttak.

A 3.33 - 3.37 függvények függvény kompozícióként állíthatók elő a 2.§.-ban leírt módszer felhasználásával, mivel a 25. ábrán bemutatott rendszer ($1 \leq (2 \leq 3)$) strukturáju kompozíciós rendszer.

A függvényátalakítások egyszerűbbé tétele érdekében a 3.35 - 3.37 határfeltételek helyett a következő határfeltételeket használjuk fel:

$$\xi_{11} \geq \frac{1 - k_2 + k_2 k_3}{1 - k_1 - k_2 + k_1 k_2 + k_2 k_3} \quad 3.40$$

$$\xi_{21} \geq \frac{k_1}{1 - k_1 - k_2 + k_1 k_2 + k_2 k_3} \quad 3.41$$

$$\xi_{31} \geq \frac{k_1 k_2}{1 - k_1 - k_2 + k_1 k_2 + k_2 k_3} \quad 3.42$$

ahol $\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31}$ - az 1, 2, és 3 elemre vonatkozó cirkulációs áramokból az x komponens áramára megállapított korlátozás értékei.

A $\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31}$ értékek meghatározhatók a Newton módszerrel való optimalizálás eredményeiből visszaszámolással.

Vezessük be a következő leképzést

$$\frac{k}{1-k} = u, \quad \frac{k_i}{1-k_i} = u_i, \quad \frac{\ell_i}{1-\ell_i} = v_i, \quad i=1,2,3 \quad 3.43$$

Ebben az esetben a 3.39 egyenlet a következő alakot veszi fel

$$v_i = S_i u_i, \quad i=1,2,3 \quad 3.44$$

A 3.44 egyenletek figyelembevételével a 25. ábrán látható rendszer határgörbéjének meghatározási feladata a következő módon fogalmazható meg:

Keressük

$$\min \frac{S_1 S_2 S_3 u_1 u_2 u_3}{1 + S_3 u_3 + S_2 S_3 u_2 u_3} \quad 3.45$$

$$u = \frac{u_1 u_2 u_3}{1 + u_3 + u_2 u_3} \quad 3.46$$

különböző rögzített értékeinél, $u \in (0, \infty)$ a következő határfeltételek teljesítése mellett

$$\xi_{11} \geq \frac{1 + u_1 + u_3 + u_1 u_3 + u_2 u_3 + u_1 u_2 u_3}{1 + u_3 + u_2 u_3 + u_1 u_2 u_3} \quad 3.47$$

$$\xi_{21} \geq \frac{u_1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_2 u_3}{1 + u_3 + u_2 u_3 + u_1 u_2 u_3} \quad 3.48$$

$$\xi_{31} \geq \frac{u_1 u_2 + u_1 u_2 u_3}{1 + u_3 + u_2 u_3 + u_1 u_2 u_3} \quad 3.49$$

$$u_i \geq 0, \quad i=1,2,3 \quad 3.50$$

A 3.45 célfüggvény átalakításával és a 3.46 egyenletnek két egyenlőtlenségként való felírásával a 3.45 - 3.50 feladat a következő alakra hozható:

$$\text{Keressük } \max(u_1^{-1} u_2^{-1} u_3^{-1} + s_3 u_1^{-1} u_2^{-1} + s_2 s_3 u_1^{-1}) \quad 3.51$$

a következő határfeltételek teljesítése mellett

$$1 \geq uu_3 + uu_2 u_3 + (u+1) - u_1 u_2 u_3 \quad 3.52$$

$$1 \geq u_1 u_2 u_3 - uu_3 - uu_2 u_3 - (u-1) \quad 3.53$$

$$1 \geq u_1 + u_1 u_3 - (\xi_{11} - 1) u_3 - (\xi_{11} - 1) u_2 u_3 - (\xi_{11} - 1) u_1 u_2 u_3 - (\xi_{11} - 2) \quad 3.54$$

$$1 \geq u_1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 - \xi_{21} u_3 - \xi_{21} u_2 u_3 - (\xi_{21} - 1) u_1 u_2 u_3 - (\xi_{21} - 1) \quad 3.55$$

$$1 \geq u_1 u_2 - \xi_{31} u_3 - \xi_{31} u_2 u_3 - (\xi_{31} - 1) u_1 u_2 u_3 - (\xi_{31} - 1) \quad 3.56$$

ahol $u_i > 0$, $i=1,2,3$,

Ez a feladat signominális programozási feladat. A 3.51-3.56 feladatban $u_i \geq 0$, $i=1,2,3$ helyett $u_i > 0$, $i=1,2,3$ feltételt szabtuk, amely fizikailag indokolt, ha korlátozzuk a cirkulációs áramok nagyságát. Ha különböző rögzített $u \in (0, \infty)$ értékek mellett megoldjuk a fenti feladatot a kapott eredményből a következő egyenlet segítségével határozható meg az ℓ értéke:

$$\frac{\ell}{1 - \ell} = \frac{s_1 s_2 s_3}{\max(u_1^{-1} u_2^{-1} u_3^{-1} + s_3 u_1^{-1} u_2^{-1} + s_2 s_3 u_1^{-1})}$$

3.57

Hasonló módon tetszőleges szétválasztási rendszer határgörbéjének meghatározási feladata is átalakítható signomiális programozási feladattá, mivel a feladat célfüggvénye és határfeltételei racionális tört függvények.

A 3.51 - 3.56 feladat megoldására a SIGNOPT nevű programot használtuk fel, melyet Templeman A.B. Wilson A.J. és Winterbottom S.K, a Liverpoli Egyetem munkatársai dolgoztak ki. Általában a geometriai programozás signomiális feladatának megoldásakor a signominális feladatot átalakítják a geometriai programozás prototipusu primál feladatává. Az átalakítás céljára leggyakrabban a következő módszerek használatosak:

- geometriai egyenlőtlenségen alapuló módszerek [48,49]
- harmonikus egyenlőtlenségen alapuló módszerek [50].

A felhasznált SIGNOPT programban a signomiális feladatról a geometriai programozás prototipusu primál feladatára a szerzők az átmenetet a [48]-ban megalapozott geometriai egyenlőtlenségen alapuló módszer felhasználásával oldják meg. Ebben az esetben szükség van a változók kezdőértékének megadására és a megoldás a prototipusu feladat néhányszori megoldásával érhető el. A prototipusu feladat minden újabb megoldása esetén a változók kezdőértékeként az előző megoldás optimumpontjának koordinátái kerülnek felhasználásra. Ez az iteratív módszer véges számú lépés után a feladat megoldásához tart. A megoldás megkönnyítése érdekében a prototipusu primál feladat átalakításra kerül megfelelő duál feladattá. Valamennyi szükséges átalakítás a program segítségével történik. A geometriai programozás duál feladatának megoldása a Fletcher-Reeves-féle konjugált gradiens módszer felhasználásával történik. A duál feladat változóiról a primál feladat változóira való átmenet egy log-lineáris egyenletrendszerről megoldásával történik a Gauss-féle elimináció felhasználásával.

A 3.51 - 3.56 feladat megoldásakor a következő paraméter értékekkel dolgoztunk: az optimalizálás kezdőpontjaként a következő koordinátájú pontot vettük fel: $u_{1k}=24,0$; $u_{2k}=1,56$; $u_{3k}=0,89$, a paraméterek értékei pedig: $S_1=0,5$; $S_2=0,4$; $S_3=0,3$; $\xi_{11}=2,24$; $\xi_{21}=3,15$; $\xi_{31}=1,91$. A feladatot a következő rögzített u érték mellett oldottuk meg: $u=9,0$. A feladat megoldását két iterációs lépésben értük el. A kapott eredmények az adott $\varepsilon=0,01$ pontossággal megfelelnek azoknak az eredményeknek, amelyeket a feladatnak a módosított Newton módszerrel való megoldásakor kaptunk. A megoldás 2,3 sec gépidőt igényelt a Moszkvai Irányítási Problémák Intézetének ICL 4-70 -es gépén (ez az idő szükséges a határgörbe egy pontjának kiszámításához). Megállapítható, hogy a SIGNOPT programmal a feladat gyorsabban oldható meg, mint a módosított Newton módszer felhasználásával, de a SIGNOPT programban alkalmazott módszer megkívánja, hogy a kezdőpontot az optimum ponthoz közeli tartományból válasszuk ki, amely nagy problémákat okoz a generált szétválasztási rendszerek határgörbájének meghatározásakor.

5.§. Egyszerűsített módszer alapkapsolások kompozíciójával előállítható szétválasztási rendszerek határgörbájének meghatározására

A szétválasztási rendszerek határgörbájének gyorsabb meghatározása érdekében kompozíciós rendszerek esetére sikerült egysebzű módszert kidolgozni, amely a kompozíciós rendszerek sajátosságaira épül [6,55]. Az első fejezetben definiáltuk a kompozíciós rendszerek alapelemének az alapkapsolásoknak a fogalmát, felírtuk kapcsolati egyenleteinket és az i -edik, $i=1,2$, elemükre vonatkozó cirkulációt. Ezeknek az egyenleteknek a felhasználásával ebben a paragrafusban módszert adunk az alapkapsolások határgörbájének meghatározására. A fentiekből tudjuk, hogy n szétválasztó elemből álló kompozíciós rendszerek leírhatók $n-1$ pár

zárójel és négy műveleti jel kitételével. A zárójelek egymásutáni sorozatos felbontásával a kompozíciós rendszer határgörbéje alapkapsolások határgörbéjének sorozatos meghatározásával állítható elő. Vizsgáljuk meg az alapkapsolások határgörbéjének meghatározási feladatát.

1.) Az 1. alapkapsolás határgörbéjének meghatározása.

Az 1. alapkapsolás határgörbéjének meghatározási feladata a következőképpen fogalmazható meg.

Legyen $l = l_1 l_2$, keressük $\min_{l_1, l_2} l$

$$k = k_1 k_2$$

különböző rögzített értékeinél, $k \in (0,1)$, ha adottak a következő összefüggések

$$l_i = \phi(k_i), \quad i=1,2$$

és teljesülnek a következő korlátozások

$$0 \leq k_i \leq 1, \quad i=1,2$$

ahol $\phi_i(k_i)$ - az 1. alapkapsolás i -edik elemének határgörbéje.

Az egyenlőség típusu határfeltételek kizárásával a feladat a következő alakra hozható:

Keressük

$$\min[\phi_1(k_1)\phi_2(\frac{k}{k_1})] \quad 3.58$$

különböző rögzített k értékek mellett, $k \in (0,1)$, teljesítve a következő korlátozást

$$k \leq k_1 \leq 1$$

Mivel $k_2 = \frac{k}{k_1}$ a $[0,1]$ intervallumban értelmezve, ezért kell teljesülnie a $k \leq k_1$ egyenlőtlenségnek.

Mivel a ϕ_1 és ϕ_2 függvények nemlineárisak, ezért az adott feladat nemlineáris programozási feladat egyenlőtlenség típusu határfeltétellel. E feladat megoldása érdekében bebizonyítjuk a következő állítást.

1. Állítás. Legyen A az $f_i(x_i), i=1,2, x_i \in [0,1]$ folytonos szakaszosan lineáris függvények osztálya, amelyekre teljesül, hogy $f_1(0)=0, f_1(1)=1$. Az f_i függvények argumentumaira teljesül az $y=x_1x_2$ egyenlőség. Ekkor érvényes a következő állítás:

- a) azon pontok a mértani helye az x_1x_2 koordinátarendszerben, amelyek kielégítik

$$\min_{y \leq x_1 \leq 1} [f_1(x_1)f_2(\frac{y}{x_1})] - t \quad 3.59$$

a "függetlenségi" tartomány és az x_1 és x_2 értékekkel meghatározott rácsélek. Az x_1 és x_2 értékei a $\{x_1^{(k)}\}, k=0, \dots, n; \{x_2^{(l)}\}, l=0, \dots, m$ pontsorozatok tagjai, amelyek a $[0,1]$ intervallumban növekedési sorrendben rendezettek, a "függetlenségi" tartományt pedig e pontsorozatok első két tagja határozza meg;

- b) ha $g(y) = \min_{y \leq x_1 \leq 1} [f_1(x_1)f_2(\frac{y}{x_1})],$

akkor $g(y) \in A$.

Bizonyítás.

a) A felvett $f_1(x_1)$ és $f_2(x_2)$ függvények a következő alakúak

$$f_i(x_i) = \begin{cases} a_i^{(1)}x_i + b_i^{(1)}, & \text{ha } 0 \leq x_i \leq x_i^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ a_i^{(j)}x_i + b_i^{(j)}, & \text{ha } x_i^{(j-1)} \leq x_i \leq x_i^{(j)} \\ \vdots & \vdots \\ a_i^{(p)}x_i + b_i^{(p)}, & \text{ha } x_i^{(p-1)} \leq x_i \leq x_i^{(p)} \end{cases} \quad 3.60$$

ahol $i=1$, esetén $j=k$, $p=n$;

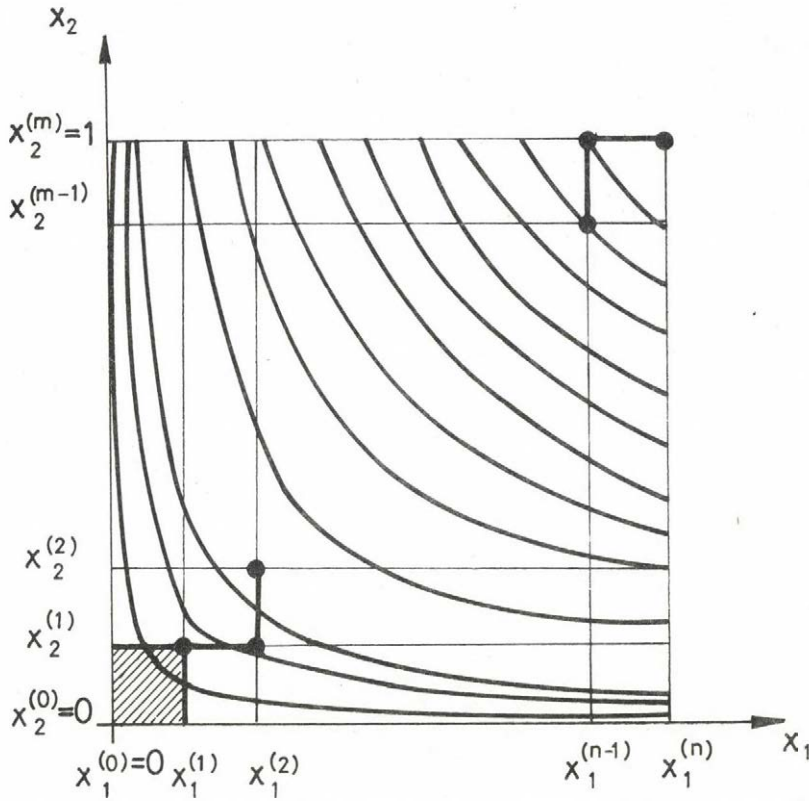
$i=2$, esetén $j=l$, $p=m$.

Az egyenes szakaszok paramétereire teljesülnek a következő összefüggések:

$$b_i^{(p)} < b_i^{(p-1)} < \dots < b_i^{(j)} < \dots < b_i^{(1)} = 0$$

$$a_i^{(p)} > a_i^{(p-1)} > \dots > a_i^{(j)} > \dots > a_i^{(1)} > 0$$

Az 3.59 feladat megoldása érdekében ábrázoljuk az $x_2 = \frac{y}{x_1}$ görbéket az x_1, x_2 koordinátarendszerben és építsük fel az adott $\{x_1^{(k)}\}$ és $\{x_2^{(l)}\}$ pontsorozatok felhasználásával a rácsot (26. ábra).



26. ábra.

Az $f_1(x_1)$ és $f_2(x_2)$ függvények 3.60-ban felvett alakjának figyelembevételével a 3.59 feladat a következőképpen írható fel:

$$\min_{x_1, x_2} [f_1(x_1)f_2(x_2)] = \min_{x_1, x_2} [a_1^{(k)}x_1 + b_1^{(k)})(a_2^{(l)}x_2 + b_2^{(l)})] \quad 3.61$$

A $0 \leq x_1 \leq x_1^{(1)}$, $0 \leq x_2 \leq x_2^{(1)}$ tartományban a feladat

$$\min_{x_1, x_2} [(a_1^{(1)}x_1 + b_1^{(1)})(a_2^{(1)}x_2 + b_2^{(1)})] = a_1^{(1)}a_2^{(1)}y$$

vagyis a megoldás független az x_1, x_2 koordinátáktól, ezért nevezzük ezt a tartományt "függetlenségi" tartománynak.

A többi tartományban, vagyis ha $1 < k \leq n$, $1 < l \leq m$

$\min_{x_1, x_2} [(a_1^{(k)} x_1 + b_1^{(k)}) (a_2^{(l)} x_2 + b_2^{(l)})]$ telejsük, ha

$$\max_{x_1, x_2} (a_1^{(k)} b_2^{(l)} x_1 + a_2^{(l)} b_1^{(k)} x_2) = \max_{x_1, x_2} (c x_1 + x_2) \quad 3.62$$

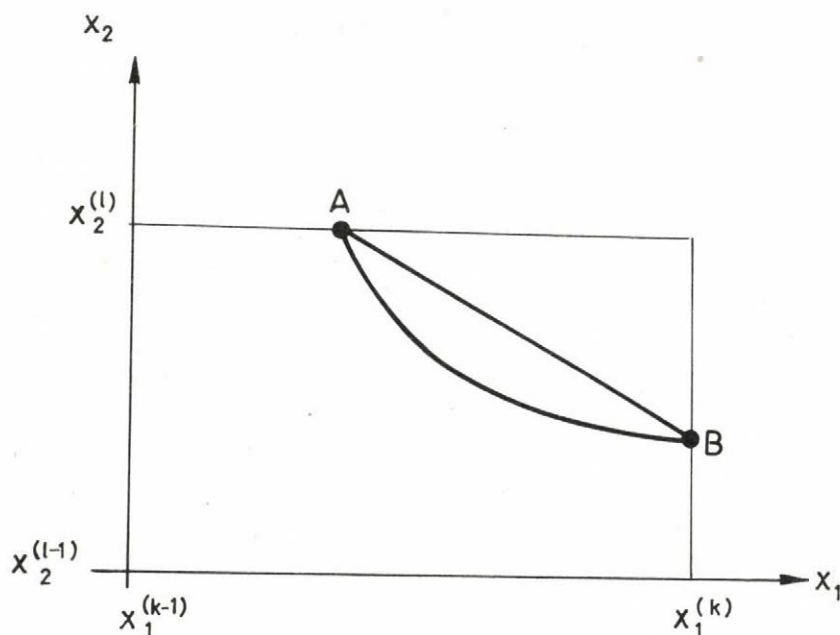
ahol

$$c = \frac{a_1^{(k)} b_2^{(l)}}{a_2^{(l)} b_1^{(k)}} > 0.$$

A $\max_{x_1, x_2} (c x_1 + x_2)$ meghatározása érdekében az $x_2 = \frac{y}{x_1}$ gör-

be helyett felvesszük az $x_2 = a x_1 + b$ egyenest, amely átmegy az $x_2 = \frac{y}{x_1}$ görbe és az $x_1^{(k)}$ és $x_2^{(l)}$ rácsélek

metszéspontjain (27. ábra).



27. ábra.

Az egyenes paramétereire érvényesek a következő feltételek:
 $a < 0$, $b > 0$. Ekkor fennáll a következő egyenlőség:

$$\max_{x_1, x_2} (cx_1 + x_2) = \max_{x_1} [(a+c)x_1 + b]$$

ahol a függvény a maximumát $\max x_1 = x_1^{(k)}$ esetén éri el,
 ha $c > |a|$ (ez megfelel a B pontnak), vagy $\max x_2 = x_2^{(\ell)}$
 esetén, ha $c < |a|$ (ez az A pont). Ez azt jelenti, hogy
 $x_2 = ax_1 + b$ esetén a 3.59 feladat megoldása a rács egyik
 élén található a "c" és "a" paraméterek viszonyától
 függően. $x_2 = \frac{y}{x_1}$ esetén ez az állítás méginkább teljesül,
 mivel ez a görbe konvex. Ezzel az 1. állítás első része bi-
 zonyítást nyert.

b) Az állítás első részének bizonyításakor azt kaptuk,
 hogy $0 \leq x_1 \leq x_1^{(1)}$, $0 \leq x_2 \leq x_2^{(1)}$ esetén a minimalizálási fela-
 dat végtelen számú megoldással rendelkezik, amelyek a $g(y)$
 függvényen egyetlen szakaszt határoznak meg a következő
 egyenes szakasz formájában

$$g(y) = a_1^{(1)} a_2^{(1)} y \quad 3.63$$

A szakasz végpontja $y = x_1^{(1)} x_2^{(1)}$.

$1 < k \leq n$, $1 < \ell \leq m$ esetén a $g(y)$ függvény a következő-
 képpen határozható meg:

$$\begin{aligned} g(y) &= a_1^{(k)} a_2^{(\ell)} y + b_1^{(k)} b_2^{(\ell)} + a_1^{(k)} b_2^{(\ell)} x_1^{(k)} + a_2^{(\ell)} b_1^{(k)} \frac{y}{x_1^{(k)}} = \\ &= (a_1^{(k)} a_2^{(\ell)} + a_2^{(\ell)} b_1^{(k)} \frac{1}{x_1^{(k)}}) y + (b_1^{(k)} b_2^{(\ell)} + a_1^{(k)} b_2^{(\ell)} x_1^{(k)}) = c_1 y + d_1 \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned}
 g(y) &= a_1^{(k)} a_2^{(\ell)} y + b_1^{(k)} b_2^{(\ell)} + a_1^{(k)} b_2^{(\ell)} \frac{y}{x_2^{(\ell)}} + a_2^{(\ell)} b_1^{(k)} x_2^{(\ell)} = \\
 &= (a_1^{(k)} a_2^{(\ell)} + a_1^{(k)} b_2^{(\ell)} \frac{1}{x_2^{(\ell)}}) y + (b_1^{(k)} b_2^{(\ell)} + a_2^{(\ell)} b_1^{(k)} x_2^{(\ell)}) = c_2 y + d_2
 \end{aligned}$$

3.65

vagyis a $g(y)$ függvény szakaszosan lineáris függvény.

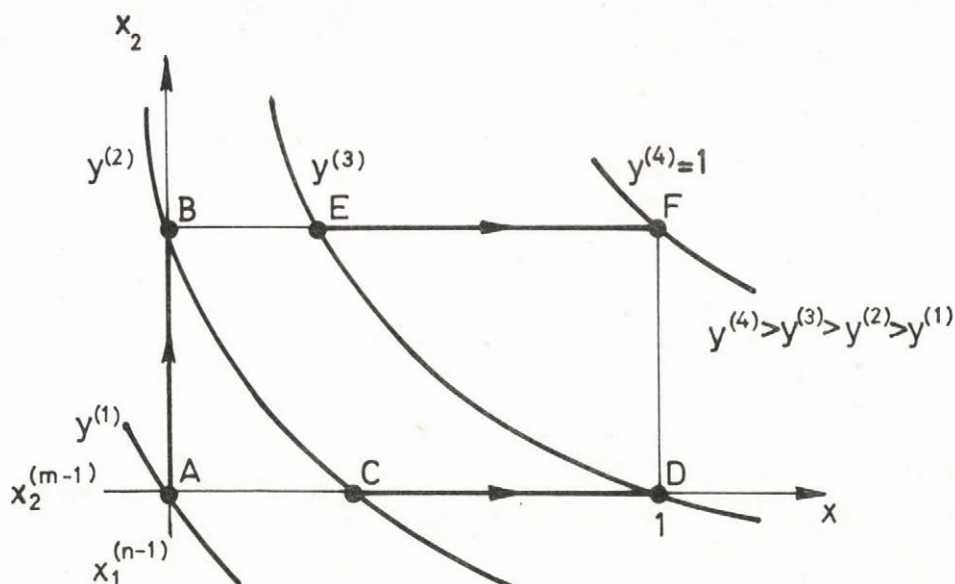
A rács csomópontjaiban az y növekedésének megfelelő két lehetséges elmozdulási irány közül mindig az a rácsél menti elmozdulás kerül kiválasztásra, amely kisebb c hajlásszögű egyenesszakaszt határoz meg a $g(y)$ függvényben, mivel ez biztosítja a 3.59 feladat megoldását.

Ilymódon a $g(y)$ függvény szakaszosan lineáris függvény. Megmutatjuk, hogy folytonos és $g(0)=0$, $g(1)=1$. Az 1. állítás b. pontja értelmében

$$g(y) = \min_{x_1, x_2} [f_1(x_1) f_2(x_2)]$$

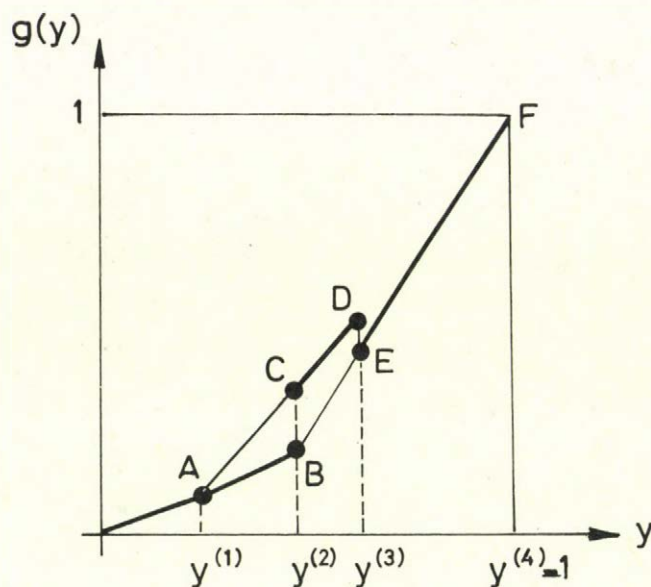
vagyis ha $x_1=0$ vagy $x_2=0$, $g(0)=0$, ha pedig $x_1=1$ és $x_2=1$, $g(1)=1$.

A rácséleken való folyamatos, y növekedésének megfelelő elmozdulás biztosítja a $g(y)$ függvény folytonosságát, mivel a rács minden éle a $g(y)$ függvény egyetlen egyenesszakaszát határozza meg, a rács csomópontjaiban pedig, ahol az új egyenesszakaszok keletkeznek, az y és $g(y)$ értéke nem változik. Megmutatjuk, hogy rácséleken való elmozdulás folyamatosságának megsértése esetén megszűnik a $g(y)$ függvény folytonossága. Erre a célra felvesszük a rács egyik négyszögét (28. ábra).



28. ábra.

Haladjunk a vastag vonalak mentén a nyilak irányában. Elegendő csak a rács csomópontjain keresztülmenő görbéket vizsgálni (a $y^{(1)} - y^{(4)}$ görbék), mivel ezek a görbék közötti állapotot a $g(y)$ függvény egyetlen egyenes szakasza írja le. A felvett rácsnégyszög AB oldalának megfelel a $g(y)$ függvény AB szakasza (29. ábra), amíg a rácsnégyszög AD oldala a függvény AD szakaszát határozza meg. $y^{(2)}$ értéknél való átmenet az AD oldalra megfelel a függvény CD szakaszának. A rácsnégyszög B és C pontjaiban ugyanazon $y^{(2)}$ argumentumérték mellett a $g(y)$ függvény különböző értékeket vesz fel (a B és C pontok a 29. ábrán). A rácsnégyszög BF oldalára való visszatérésnek $y^{(3)}$ argumentumérték mellett megfelelnek a függvény D és E pontjai. Az így kapott eredmény igazolja, hogy a rácséleken való elmozdulás folyamatosságának megsértése a $g(y)$ függvény folytonosságának megsértéséhez vezet.



29. ábra.

Ezzel az 1. állítás második része is bizonyítást nyert. Az ilymódon kapott $g(y)$ függvény $n+m-1$ egyenes szakaszból áll.

Ha az 1. alapkapsolást alkotó szétválasztó elemek $\phi_1(k_1)$ és $\phi_2(k_2)$ határgörbéit az A osztályba tartozó szakaszosan lineáris függvénnyel approximáljuk, akkor az 1. állítás szerint a 3.58 feladat megoldása a k_1, k_2 koordinátarendszerben felvett rács $\{k_1^{(j)}\}$, $j=0, \dots, n$; $\{k_2^{(i)}\}$, $i=0, \dots, m$ élein található és az 1. alapkapsolás ilymódon meghatározott $\phi(k)$ határgörbéje $\phi(k) \in A$, vagyis folytonos szakaszosan lineáris és $n+m-1$ szakaszból áll.

Ekkor az 1. alapkapsolás határgörbéjének kiindulási meghatározásifeladata a következőképpen fogalmazható meg:

Keressük \min_{k_1, k_2}

ha adottak a következő összefüggések

$$\begin{aligned} k &= k_1 k_2 \\ \ell_1 &= a_1^{(j)} k_1 + b_1^{(j)}, \quad j=1, \dots, n \\ \ell_2 &= a_2^{(i)} k_2 + b_2^{(i)}, \quad i=1, \dots, m \end{aligned}$$

és teljesülnek a következő korlátozások

$$\begin{aligned} 0 &\leq k_1 \leq 1 \\ 0 &\leq k_2 \leq 1 \end{aligned}$$

ahol, n, m - az 1. és 2. elem határgörbáját approxi-
máló egyenes szakaszok száma;

i, j - az egyenes szakasz sorszáma.

Az 1. állítás felhasználásával elkészített program modul az alapkapcsolást alkotó szétválasztó elemek határgörbéinek töréspontjaiból kiszámítja az 1. alapkapcsolás határgörbéjének töréspontjait.

2) A 2. alapkapcsolás határgörbéjének meghatározása.

A 2. alapkapcsolás határgörbéjének meghatározási feladata a következőképpen fogalmazható meg.

Legyen $(1-k) = (1-k_1)(1-k_2)$,

keressük $\min_{k_1, k_2} (1-k)$, az

$$(1 - \ell) = (1 - \ell_1)(1 - \ell_2)$$

különböző rögzített értékeinél, $(1-\ell) \in (0, 1)$,

ha adottak a következő összefüggések:

$$\ell_i = \phi_i(k_i), \quad i=1, 2$$

és teljesülnek a következő korlátozások

$$0 \leq k_i \leq 1, \quad i = 1, 2$$

ahol $\phi(k_i)$ - a 2. alapkapcsolás i -edik elemének határgörbéje.

Ebben az esetben szintén approximáljuk egyenes szakaszokkal az elemek határgörbéjét. Az első elem határgörbéjét, ahogy az 1. alapkapcsolás esetében n egyenes szakasszal, a másodikét m szakasszal approximáljuk. Ekkor az elemek határgörbéi a következő alakúak:

$$\ell_1 = a_1^{(j)} k_1 + b_1^{(j)}, \quad j=1, \dots, n$$

$$\ell_2 = a_2^{(i)} k_2 + b_2^{(i)}, \quad i=1, \dots, m$$

Végezzük el a következő átalakítást:

$$1-k = p, \quad 1-k_1 = p_1, \quad 1-k_2 = p_2$$

$$1-\ell = q, \quad 1-\ell_1 = q_1, \quad 1-\ell_2 = q_2$$

Ekkor a minimalizálási feladat a következő alakra hozható.

$$\text{Legyen } p = p_1 p_2,$$

$$\text{keressük } \min_p$$

$$p_1, p_2$$

ha adottak a következő összefüggések

$$q = q_1 q_2$$

$$p_1 = \alpha_1^{(j)} q_1 + \beta_1^{(j)}, \quad j=1, \dots, n$$

$$p_2 = \alpha_2^{(i)} q_2 + \beta_2^{(i)}, \quad i=1, \dots, m$$

és teljesülnek a következő korlátozások

$$0 \leq q_1 \leq 1$$

$$0 \leq q_2 \leq 1$$

Ily módon az 1. alapkapsolás határgörbájének meghatározási feladatával azonos feladatot kaptunk. E feladat megoldása az 1. alapkapsolásnál bemutatott megoldással azonos. A változók átalakítása megfelel a k, ℓ koordinátarendszernek a q, p koordinátarendszerbe való leképezésének. A fordított leképezés hasonló módon történik.

A 2. alapkapsolás határgörbájének számítógéppel történő kiszámításakor egy programmodult kell készíteni, amely elvégzi a koordinátarendszereknek egymásba való leképezését. Tehát először el kell végezni az alapkapsolást alkotó elemek határgörbéi töréspontjainak leképezését a q, p koordinátarendszerbe, majd meg kell oldani a minimalizálási feladatot az 1. alapkapsoláshoz kidolgozott programmodul segítségével. Az így kapott határgörbe töréspontjait vissza kell transzformálni a k, ℓ koordinátarendszerbe.

3.) A 3. alapkapsolás határgörbájének meghatározása.
A 3. alapkapsolás határgörbájének meghatározási feladata a következőképpen fogalmazható meg.

$$\text{Legyen} \quad \ell = \frac{\ell_1 \ell_2}{1 - \ell_1 + \ell_1 \ell_2},$$

keressük $\min_{\ell_1, \ell_2} \ell$, a

$$k = \frac{k_1 k_2}{1 - k_1 + k_1 k_2}$$

különböző értékeinél, $k \in (0,1)$, ha adottak a következő összefüggések

$$l_i = \phi_i(k_i) \quad , \quad i=1,2$$

és teljesülnek a következő korlátozások

$$0 \leq k_i \leq 1 \quad , \quad i=1,2$$

ahol $\phi_i(k_i)$ - a 3. alapkapcsolás i -edik elemének határgörbéje.

Az egyenlőségtípusu határfeltételek kizárásával a feladat a következő alakra hozható.

$$\text{Keressük} \quad \min_{k_1} \quad \frac{\phi_1(k_1)\phi_2\left(\frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}\right)}{1-\phi_1(k_1)+\phi_1(k_1)\phi_2\frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}} \quad 3.66$$

különböző rögzített k értékek mellett, $k \in (0,1)$, teljesítve a következő korlátozást

$$k \leq k_1 \leq 1$$

Mivel $k_2 = \frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}$ a $[0,1]$ intervallumban van értelmezve, ezért kell teljesülnie a $k \leq k_1$ egyenlőtlenségnek.

Ez a feladat egyszerű megoldással rendelkezik, ha teljesül a következő állítás.

2. Allítás.

$$A \quad \frac{\phi_1(k_1)\phi_2\left(\frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}\right)}{1-\phi_1(k_1)+\phi_1(k_1)\phi_2\left(\frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}\right)} \quad \text{függvény monoton csökkenő}$$

függvénye k_1 -nek a $[0,1]$ intervallumban, ha a ϕ_1 és ϕ_2 függvények megfelelnek a határgörbe definíciójának és a $\phi_1(k_1)$

függvényre teljesül, hogy a $\frac{\phi_1(k_1)}{1-\phi_1(k_1)} \cdot \frac{k_1}{1-k_1}$ függvény k_1 mo-

noton csökkenő függvénye a $[0,1]$ intervallumban.

Bizonyítás.

Alakítsuk át a 3.66 célfüggvényt a következő módon:

$$\frac{\phi_1(k_1)\phi_2\left(k_0 \frac{1-k_1}{k_1}\right)}{1-\phi_1(k_1)+\phi_1(k_1)\phi_2\left(k_0 \frac{1-k_1}{k_1}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\phi_1(k_1)\phi_2\left(k_0 \frac{1-k_1}{k_1}\right)}{1-\phi_1(k_1)}}} \quad 3.67$$

ahol $k_0 = \frac{k}{1-k}$ - állandó.

A 3.66 célfüggvény akkor lesz k_1 monoton csökkenő függvénye, ha

$$\frac{\phi_1(k_1)\phi_2\left(k_0 \frac{1-k_1}{k_1}\right)}{1-\phi_1(k_1)} \quad 3.68$$

monoton csökken.

A 3.68 függvény a következő alakra hozható:

$$\frac{\phi_1(k_1)\phi_2(k_0 \frac{1-k_1}{k_1})}{1-\phi_1(k_1)} = k_0 \frac{\phi_2(k_0 \frac{1-k_1}{k_1})}{k_0 \frac{1-k_1}{k_1}} \cdot \frac{\frac{\phi_1(k_1)}{1-\phi_1(k_1)}}{\frac{k_1}{1-k_1}} \quad 3.69$$

A 3.69 függvény monoton csökkenő akkor (de nemcsak akkor), ha az egyenlet jobb oldalán szereplő szorzótényezők külön-külön monoton csökkenő függvényei k_1 -nek a $[0,1]$ intervallumban.

A $\frac{\phi_2(k_0 \frac{1-k_1}{k_1})}{k_0 \frac{1-k_1}{k_1}}$ tényező monoton csökkenő függvénye k_1 -nek

a ϕ_2 függvény konvexitása miatt, a $\frac{\frac{\phi_1(k_1)}{1-\phi_1(k_1)}}{\frac{k_1}{1-k_1}}$

tényező pedig az állítás értelmében monoton csökkenő. Ezzel a 2. állítás bizonyítást nyert.

Megjegyzés. A következő függvények

$$\phi_1(k_1) = \frac{S_1 k_1}{1-k_1(1-S_1)} \quad \text{vagy} \quad \phi_1(k_1) = \frac{S_1 k_1}{1-k_1^2(1-S_1)}$$

kielégítik a 2. állítás feltételét.

A 2. állításnak megfelelően a 3.66 célfüggvény k_1 monoton csökkenő függvénye a $[0,1]$ intervallumban, ezért a minimalizálási feladat megoldása $\max k_1=1$ értéknél van. Ebben az esetben $k_2=0$.

A [41] munka szerzője megállapította, hogy a $k_1=1$ és $k_2=0$ feltétel teljesülése csak a 3. alapkapsolás elemein átfolyó végtelen nagyságu cirkulációs áramok esetén lehetséges. Konstruktív megfontolások alapján végtelen cirkulációs áramok nem engedhetők meg, ezért korlátozzák a cirkulációs áramok nagyságát.

A 3. alapkapsolás esetére az első fejezetben feirtuk az 1. és 2. elemre vonatkozó cirkulációt:

$$g_1 = \frac{1}{1-k_1+k_1k_2} + \frac{1}{1-l_1+l_1l_2}$$

$$g_2 = \frac{k_1}{1-k_1+k_1k_2} + \frac{l_1}{1-l_1+l_1l_2}$$

Az 1. és 2. elemre vonatkozó cirkulációra megadott korlátozások a következők:

$$\frac{1}{1-k_1+k_1k_2} + \frac{1}{1-l_1+l_1l_2} \leq \xi_1$$

$$\frac{k_1}{1-k_1+k_1k_2} + \frac{l_1}{1-l_1+l_1l_2} \leq \xi_2$$

ahol ξ_1 - az első elemre vonatkozó cirkulációra megadott korlát, amely a $[2,\infty]$ intervallumból kaphat értéket;

ξ_2 – a második elemre vonatkozó cirkulációra megadott korlát, amely a $[0, \infty]$ intervallumból kaphat értéket.

Az egyenlőség típusu határfeltételek kizárása esetén a fenti határfeltételek a következő alakot veszik fel:

$$\frac{1}{1-k_1+k_1 \frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}} + \frac{1}{1-\phi_1(k_1)+\phi_1(k_1)\phi_2(\frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)})} \leq \xi_1 \quad 3.70$$

$$\frac{k_1}{1-k_1+k_1 \frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}} + \frac{\phi_1(k_1)}{1-\phi_1(k_1)+\phi_1(k_1)\phi_2(\frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)})} \leq \xi_2 \quad 3.71$$

Ilymódon a 3.66 feladat kiegészül ezekkel a határfeltételekkel és nemlineáris programozási feladatot alkot egyenlőtlenség típusu határfeltételekkel.

A 3.70 és 3.71 határfeltételekben az összeg első tagja és x komponens, a második tagja pedig az y komponens súlyarányát jelenti a cirkulációs áramban, vagyis a határfeltételek átírhatók a következő alakra:

$$\xi_{11} \geq \frac{1}{1-k_1+k_1 \frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}} = \frac{1-k}{1-k_1}$$

$$\xi_{12} \geq \frac{1}{1-\phi_1(k_1)+\phi_1(k_1)\phi_2\left(\frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}\right)}$$

$$\xi_1 = \xi_{11} + \xi_{12}$$

$$\xi_{21} \geq \frac{k_1}{1-k_1+k_1 \frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}} = \frac{k_1(1-k)}{1-k_1}$$

$$\xi_{22} \geq \frac{\phi_1(k_1)}{1-\phi_1(k_1)+\phi_1(k_1)\phi_2\left(\frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}\right)}$$

$$\xi_2 = \xi_{21} + \xi_{22}$$

A 3.70 és 3.71 határfeltételekben az egyenlőtlenséget egyenlőséggel helyettesítve a kapott egyenleteket megoldjuk k_1 -re egy adott k érték mellett. Az így kapott k_1 értékek visszahelyettesítésével határozzuk meg a ξ_{11} és ξ_{21} értéket. Ezzel a módszerrel a 3.70 és 3.71 határfeltételeket a következő határfeltételekkel helyettesítjük:

$$\xi_{11} \geq \frac{1-k}{1-k_1} \quad 3.72$$

$$\xi_{21} \geq \frac{k_1(1-k)}{1-k_1} \quad 3.73$$

ahol ξ_{11} - az $[1, \infty]$ intervallumból kaphat konkrét értékeket;
 ξ_{21} - a $[0, \infty]$ intervallumból.

Amint azt kimutattuk, a 3.66 feladat megoldása a maximális k_1 értéknél található. A k_1 változó maximális értéket az egyik egyenlőtlenség típusu határfeltétel aktivizálódásakor éri el, vagyis akkor, amikor az egyenlőtlenség egyenlőséggé alakul az egyik határfeltételben.

Vizsgáljuk meg, hogy melyik határfeltétel aktivizálódik. Ebből a célból a 3.72 és 3.73 határfeltételből kifejezzük k_1 -et.

$$k_1 \leq \frac{\xi_{11}+k-1}{\xi_{11}} \quad 3.74$$

$$k_1 \leq \frac{\xi_{21}}{\xi_{21}+1-k} \quad 3.75$$

Mindkét esetben k_1 értéke a $[0, 1]$ intervallumba esik, vagyis a 3.72 és 3.73 határfeltételek egyike aktivizálódik, mégpedig az, amelyben az aktivizálódáskor k_1 kisebb értéket vesz fel.

A 3.74 és 3.75 kifejezések összehasonlítása

$$\frac{\xi_{11}+k-1}{\xi_{11}} \geq \frac{\xi_{21}}{\xi_{21}+1-k}$$

a következő kifejezés előjelének meghatározását jelenti

$$\text{sign}[(\xi_{11} - \xi_{21}) - (1-k)]$$

Ha e kifejezés előjele negatív, akkor a 3.72 határfeltétel aktivizálódik, ha pozitív, akkor a 3.73.

Az aktiv határfeltételből különböző k értékek mellett meghatározzuk k_1 értékét.

$$A \quad k_2 = \frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)} \quad \text{kifejezés felhasználásával közvetlenül}$$

meghatározható ismert k_1 esetén k_2 értéke is. A 3. alapkapsolást alkotó szétválasztó elemek adott határgörbéinek felhasználásával k_1 és k_2 értékhez meghatározhatók az ℓ_1 és ℓ_2 értékek.

$$\text{Ismeretükben kiszámítható} \quad \ell = \frac{\ell_1 \ell_2}{1-\ell_1+\ell_1 \ell_2} \quad \text{értéke, mely}$$

a minimalizálási feladat megoldását adja.

A 3. alapkapsolás határgörbéjének kiszámítására szolgáló programmodul, ahogy az 1. és 2. alapkapsolások esetében is, a határgörbe pontjait határozza meg az alapkapsolást alkotó elemek határgörbéjének pontjai ismeretében. A ξ_{11} , ξ_{21} értékek kiszámítása érdekében meg kell oldani az egyenlőséggé átalakított 3.70 és 3.71 kifejezéseket egy adott k érték mellett valamilyen közelítő eljárás felhasználásával. A kapott k_1 értékek felhasználásával ki kell számítani a ξ_{11} és ξ_{21} értékeket. Az ℓ_1 és ℓ_2 értékek meghatározásakor a kapott k_1 és k_2 értékek alapján interpolációt kell végrehajtani, ha a k_1 és k_2 értékek nem esnek egybe a határgörbék valamelyik adott pontjának koordinátájával.

4.) A 4. alapkapsolás határgörbéjének meghatározása.

A 4. alapkapsolás határgörbéjének meghatározási feladata a következőképpen fogalmazható meg.

$$\text{Legyen} \quad 1-k = \frac{(1-k_1)(1-k_2)}{1-(1-k_1)+(1-k_1)(1-k_2)} \quad ,$$

keressük $\min_{k_1, k_2} (1-k)$, az

$$1-\ell = \frac{(1-\ell_1)(1-\ell_2)}{1-(1-\ell_1)+(1-\ell_1)(1-\ell_2)}$$

különböző rögzített értékeinél, $(1-\ell) \in (0,1)$, ha adottak a következő összefüggések

$$\ell_i = \phi_i(k_i) \quad , \quad i=1,2$$

és teljesülnek a következő korlátozások

$$0 \leq k_i \leq 1 \quad , \quad i=1,2$$

$$\xi_{12} \geq \frac{1}{1-(1-\ell_1)+(1-\ell_1)(1-\ell_2)}$$

$$\xi_{22} \geq \frac{1-\ell_1}{1-(1-\ell_1)+(1-\ell_1)(1-\ell_1)}$$

ahol $\phi_i(k_i)$ - a 4. alapkapcsolás i -edik elemének határgörbéje.

A 2. alapkapcsolás esetében bemutatott módon képezzük le a k, ℓ koordinátarendszert q, p koordinátarendszerbe. Ebből a célból végezzük el a következő átalakítást

$$\begin{aligned} 1-k &= p \quad , \quad 1-k_1=p_1 \quad , \quad 1-k_2=p_2 \\ 1-\ell &= q \quad , \quad 1-\ell_1=q_1 \quad , \quad 1-\ell_2=q_2 \end{aligned}$$

Ebben az esetben a minimalizálási feladat a következő alakra hozható.

$$\text{Legyen} \quad p = \frac{p_1 p_2}{1-p_1+p_1 p_2} \quad ,$$

$$\text{keressük} \quad \min_{p_1, p_2} p \quad , \quad a$$

$$q = \frac{q_1 q_2}{1-q_1+q_1 q_2}$$

különböző rögzített értékeinél, $q \in (0,1)$,
ha adottak a következő összefüggések

$$p_i = \rho_i(q_i) \quad , \quad i=1,2$$

és teljesülnek a következő korlátozások

$$0 \leq q_i \leq 1 \quad , \quad i=1,2$$

$$\xi_{12} \geq \frac{1}{1-q_1+q_1q_1}$$

$$\xi_{22} \geq \frac{q_1}{1-q_1+q_1q_2}$$

ahol $\rho_i(q_i)$ - a $\phi_i(k_i)$ függvénynek megfelelő függvény a
 q, p koordinátarendszerben (a $\phi_i(k_i)$
függvénnyel azonos tulajdonságokkal
rendelkezik).

Ez a feladat azonos a 3. alapkapsolás határgörbájének meghatározási feladatával.

A 4. alapkapsolás határgörbájének számítógéppel történő meghatározása a 2. alapkapsolás esetében leírt módszer szerint történik.

Ily módon egyszerű algoritmusokat kaptunk a felvett alapkapsolások határgörbájének meghatározására. Az n szétválasztó elemből álló kompozíciós rendszerben a zárójelek egymásutáni felbontásával a négy alapkapsolás valamelyikét kapjuk, amelynek határgörbáját a fenti algoritmus segítségével meghatározva $n-1$ lépésben megkapjuk az egész kompozíciós rendszer határgörbáját.

A kompozíciós rendszerek határgörbéjének meghatározásakor a fenti módszer felhasználásával problémák merülnek fel a ξ_1 és ξ_2 korlátok értékének megállapításakor a zárójelek felbontásával keletkező 3. és 4. alapkapsolásokhoz. Ez a probléma egyszerűen oldható meg, ha az adott kompozíciós rendszer határgörbéjét egy előzetes számítással a módosított Newton módszer segítségével határozzuk meg, amikor is megkapjuk a \bar{k}^* optimumpont koordinátáit, melyek biztosítják ℓ minimumát rögzített k értéknél. Rögzített k értéként annak a pontnak a koordinátáját kell megadni, amely megfelel a rendszer optimális munkapontjának a felvett kritérium szerint (lásd 7.§.).

Bemutatjuk a ξ_1 és ξ_2 korlátok értékének meghatározási módszerét a 3. és 4. alapkapsolásokra, melyek az n szétválasztó elemből álló kompozíciós rendszerben a zárójelek egymásutáni felbontásával keletkeznek, ha adottak a \bar{k}^* optimumpont koordinátái egy rögzített k értéknél.

Tegyük fel, hogy a zárójelfelbontáskor az i -edik lépésben 3. alapkapsolás keletkezett. Az első fejezetből tudjuk, hogy a 3. alapkapsolás kapcsolati egyenletei a következők.

$$\tilde{k} = \frac{k_1 k_2}{1 - k_1 (1 - k_2)}$$

$$\tilde{\ell} = \frac{\ell_1 \ell_2}{1 - \ell_1 (1 - \ell_2)}$$

ahol k_1, k_2 - vagy a \bar{k}^* optimumpont koordinátái, vagy az az 1. táblázatba foglalt $f^{(1)} - f^{(4)}$ függvények kompozíciójával előállított értékek, melyek a zárójelfelbontás során jönnek létre a \bar{k}^* optimumpont koordinátáinak felhasználásával;

ℓ_1, ℓ_2 - értékeik a k_1, k_2 értékekhez hasonlóan alakulnak ki figyelembe véve az elemek adott $\ell_i = \phi_i(k_i)$, $i=1, \dots, n$ határgörbéit.

A fentiek figyelembevételével az 1. és 2. elemre vonatkozó cirkuláció

$$g_1 = \frac{\tilde{k}}{k_1 \cdot k_2} + \frac{\tilde{k}}{\ell_1 \ell_2} \quad 3.76$$

$$g_2 = \frac{\tilde{k}}{k_2} + \frac{\tilde{\ell}}{\ell_2} \quad 3.77$$

A ξ_1 és ξ_2 értékének meghatározásához felvesszük, hogy

$$\xi_1 = g_1, \quad \xi_2 = g_2$$

4. alapkapcsolás esetén a kapcsolati egyenletek a következők:

$$1 - \tilde{k} = \frac{(1-k_1)(1-k_2)}{1-(1-k_1)k_2}$$

$$1 - \tilde{\ell} = \frac{(1-\ell_1)(1-\ell_2)}{1-(1-\ell_1)\ell_2}$$

ebből az 1. és 2. elemre vonatkozó cirkuláció

$$g_1 = \frac{1-\tilde{k}}{(1-k_1)(1-k_2)} + \frac{1-\tilde{\ell}}{(1-\ell_1)(1-\ell_2)} \quad 3.78$$

$$g_2 = \frac{1-\tilde{k}}{1-k_2} + \frac{1-\tilde{\ell}}{1-\ell_2} \quad 3.79$$

Látható, hogy g_1 és g_2 meghatározása a 4. alapkapcsolás esetén hasonló a 3. alapkapcsolásnál bemutatotthoz, ha elvégezzük a következő átalakítást

$$\begin{aligned} 1-\tilde{k} &= \tilde{k}' , & 1-k_1 &= k'_1 , & 1-k_2 &= k'_2 \\ 1-\tilde{l} &= \tilde{l}' , & 1-l_1 &= l'_1 , & 1-l_2 &= l'_2 \\ \tilde{k} &= \tilde{k}' , & k_1 &= k'_1 , & k_2 &= k'_2 \\ \tilde{l} &= \tilde{l}' , & l_1 &= l'_1 , & l_2 &= l'_2 \end{aligned}$$

A 3. alapkapcsoláshoz hasonlóan, ξ_1 és ξ_2 értékének meghatározásakor felvesszük, hogy

$$\xi_1 = g_1 , \quad \xi_2 = g_2$$

Megjegyzés. A zárójelek felbontásával keletkező 3. és 4. alapkapcsolásokhoz szükséges ξ_1 és ξ_2 értékek lehetnek ismertek is. De, ha csak a kompozíciós rendszer i -edik elemére vonatkozó cirkulációs áramra megállapított korlát értékét ismerjük, akkor a zárójelfelbontáskor keletkező 3. és 4. alapkapcsolásokhoz a ξ_1 és ξ_2 értékét meg kell határozni. Ezt a fenti módszer segítségével kell elvégezni a próbafuttatások során. Az így meghatározott ξ_1 és ξ_2 értékeket a továbbiakban már változtatás nélkül használhatjuk.

6.§. A kompozíciós rendszerek határgörbéjének meghatározására szolgáló egyszerűsített módszer számítógépes realizációja

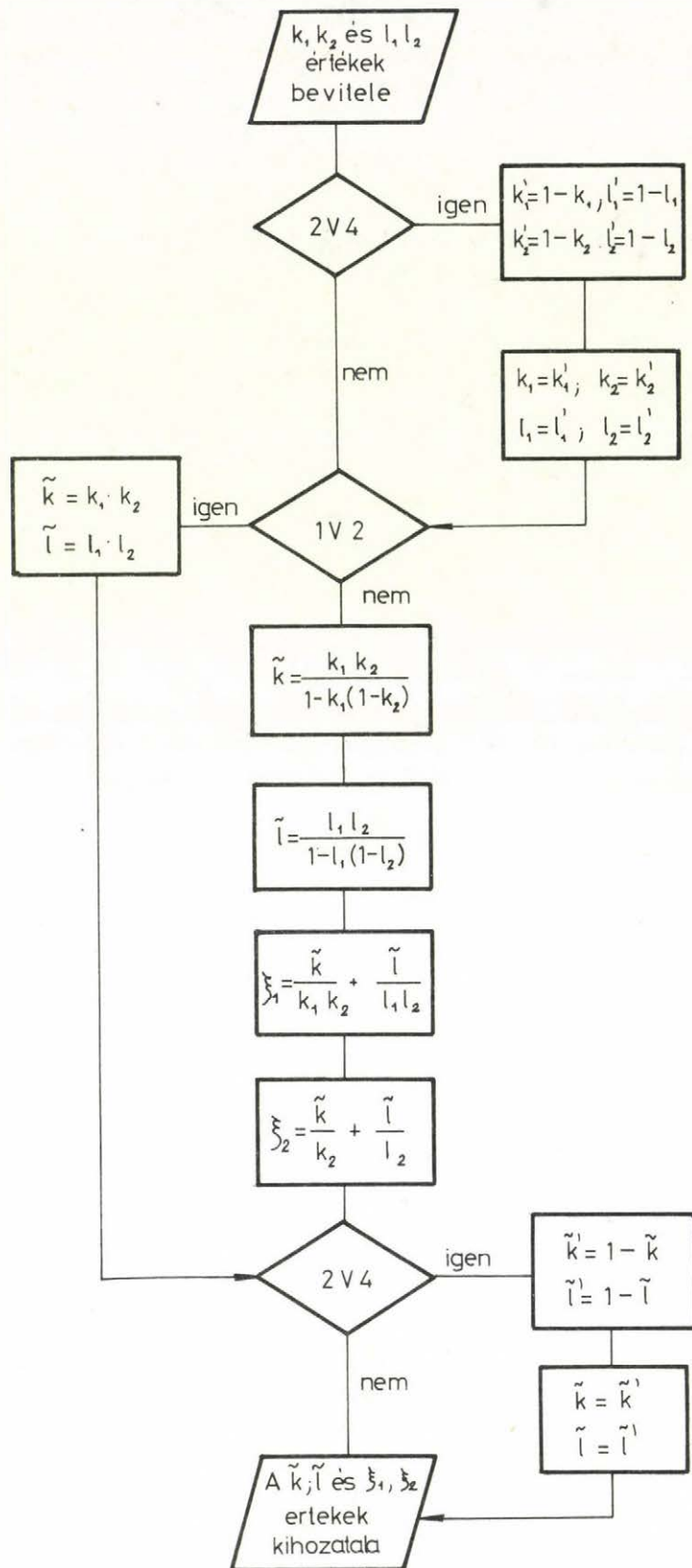
Az alapkapsolások határgörbéjének kiszámítására kidolgozott módszereket számítógépre vittük a COMPO program formájában. A program FORTRAN-IV nyelven készült a moszkvai Irányítási Problémák Intézetének ICL 4-70 -es gépére. A program ~ 1100 utasításból áll és modulok felépítésű. Fő modulok (subroutine): input, a korlátok értékének meghatározása, az 1. és 3. alapkapsolások határgörbéjének kiszámítása, a koordinátarendszerek egymásba való leképezése és output.

Az input modul biztosítja a következő adatok bevitelét:

- a szétválasztási rendszert alkotó elemek határgörbéi vagy a határgörbék pontjainak koordinátái formájában, vagy függvény alakban;
- a kompozíciós rendszer strukturája;
- a \bar{k}^* optimumpont koordinátáinak értékei.

A korlátok értékének meghatározását végző modul a 30. ábrán látható blokk-vázlat alapján működik.

1. lépés. Bevitelre kerülnek a k_1, k_2 és l_1, l_2 értékek, amelyek vagy az \bar{k}^* optimumpont koordinátái (ebben az esetben az l_1 és l_2 értékeket az $l_i = \phi_i(k_i)$, $i=1, \dots, n$ összefüggésekből kapjuk), vagy az előző számítás k, l eredményei.



30. ábra

2. lépés. Az alapkapsolás típusának ellenőrzése, ha
 1 vagy 3 - ugrás a 3. lépésre,
 2 vagy 4 - a következő átalakításra kerül sor.

$$\begin{aligned} k'_1 &= 1-k_1 & , & \quad \ell'_1 = 1-\ell_1 \\ k'_2 &= 1-k_2 & , & \quad \ell'_2 = 1-\ell_2 \\ k_1 &= k'_1 & , & \quad \ell_1 = \ell'_1 \\ k_2 &= k'_2 & , & \quad \ell_2 = \ell'_2 \end{aligned}$$

ezt követően folytatás a 3. lépéstől.

3. lépés. Ismét ellenőrzésre kerül az alapkapsolás típusa, ha

- 1 vagy 2 - a kapcsolati egyenletek meghatározása a következő

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k_1 k_2 \\ \tilde{\ell} &= \ell_1 \ell_2 \end{aligned}$$

- 3 vagy 4 - a kapcsolati egyenletek meghatározása

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \frac{k_1 k_2}{1-k_1(1-k_2)} \\ \tilde{\ell} &= \frac{\ell_1 \ell_2}{1-\ell_1(1-\ell_2)} \end{aligned}$$

és a kapott \tilde{k} és $\tilde{\ell}$ értékek felhasználásával meghatározásra kerülnek a korlátok értékei a következő képletek felhasználásával

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\tilde{k}}{k_1 k_2} + \frac{\tilde{\ell}}{\ell_1 \ell_2} \\ \xi_2 &= \frac{\tilde{k}}{k_2} + \frac{\tilde{\ell}}{\ell_2} \end{aligned}$$

majd a folytatás a 4. lépéstől.

4. lépés. Ismét az alapkapsolás típusának ellenőrzése, ha

1 vagy 3 - ugrás az 5. lépésre,

2 vagy 4 - megtörténik a visszatranszformálás

$$\begin{aligned}\tilde{k}' &= 1 - \tilde{k} \quad , \quad \tilde{\ell}' = 1 - \tilde{\ell} \\ \tilde{k} &= \tilde{k}' \quad , \quad \tilde{\ell} = \tilde{\ell}'\end{aligned}$$

melyet az 5. lépés követ.

5. lépés. Kivitelre kerülnek a $\tilde{k}, \tilde{\ell}$ és ξ_1, ξ_2 értékek, amelyeket felhasználjuk a további számításban.

Az 1. alapkapsolás határgörbájének kiszámítását végző modul a 31. ábrán látható blokk-vázlat alapján működik.

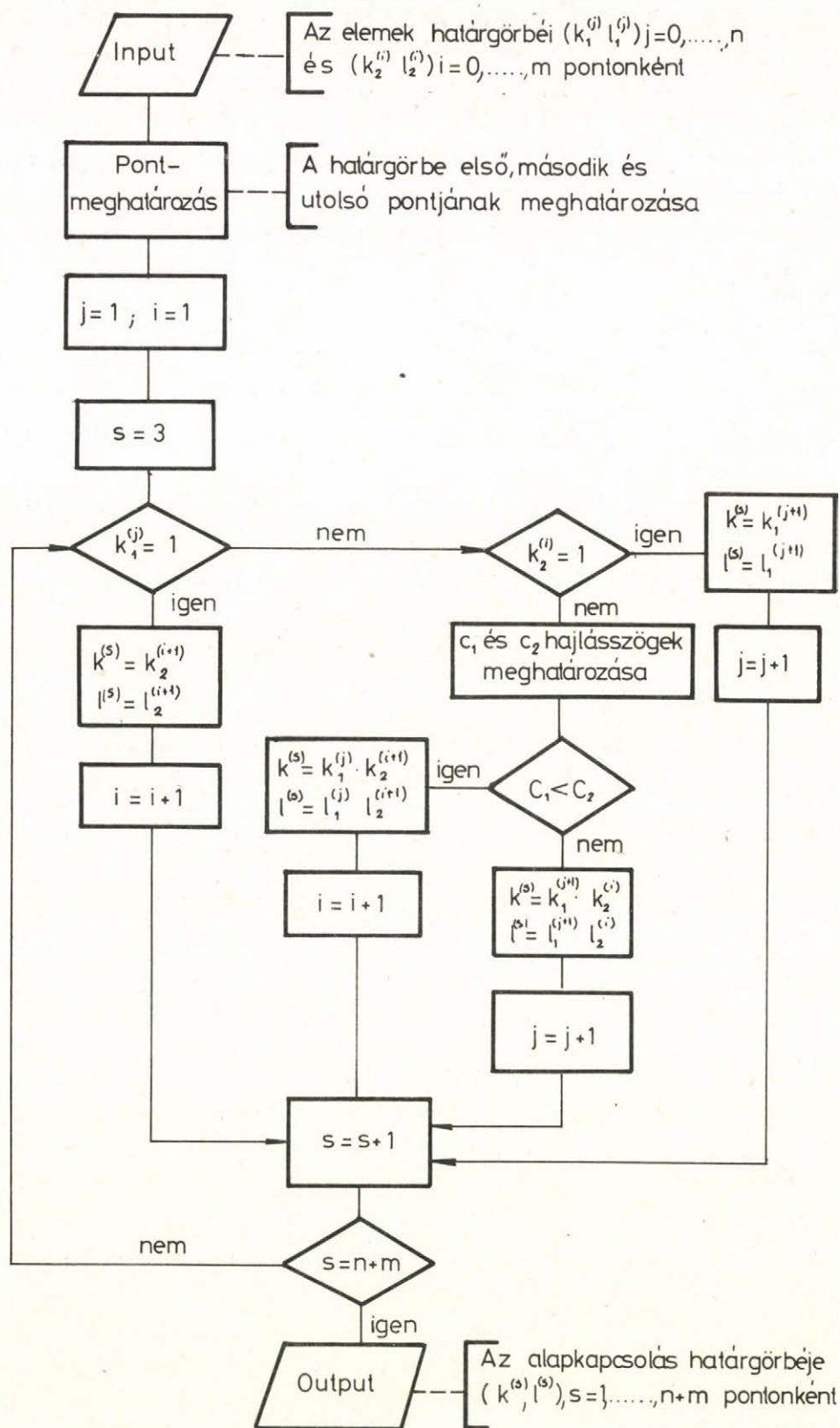
1. lépés. Bevitelre kerülnek az elemek határgörbéi pontonként, vagyis $(k_1^{(j)}, \ell_1^{(j)})$, $j=0, \dots, n$ és $(k_2^{(i)}, \ell_2^{(i)})$, $i=0, \dots, m$.

2. lépés. Meghatározásra kerül az alapkapsolás határgörbájének első, második és utolsó pontja

$$(k^{(1)}, \ell^{(1)}) = (0, 0) \quad , \quad (k^{(2)}, \ell^{(2)}) = (k_1^{(1)} k_2^{(1)}, \ell_1^{(1)} \ell_2^{(1)}) \quad ,$$

$$(k^{(n+m)}, \ell^{(n+m)}) = (1, 1)$$

és $j=1$, $i=1$ kezdőértéket kapnak az indexek, az s számláló pedig $s=3$ értéket kap.



31. ábra

3. lépés. Ellenőrzésre kerül, hogy elértük-e a rács

$k_1^{(j)} = 1$ élet, ha

$k_1^{(j)} = 1$ - határgörbe új pontjának koordinátái: $k^{(s)} = k_2^{(i+1)}$,
 $\ell^{(s)} = \ell_2^{(i+1)}$, az i index pedig $i=i+1$ és ugrás a 7. lépésre,

$k_1^{(j)} \neq 1$ - ugrás a 4. lépésre.

4. lépés. Ellenőrzésre kerül, hogy elértük-e a rács

$k_2^{(i)} = 1$ - a határgörbe új pontjának koordinátái: $k^{(s)} = k_1^{(j+1)}$,
 $\ell^{(s)} = \ell_1^{(j+1)}$, a j index $j=j+1$ és ugrás a 7. lépésre.

$k_2^{(i)} \neq 1$ - ugrás az 5. lépésre.

5. lépés. Meghatározásra kerülnek a hajlásszögek a rács-
 éleken két lehetséges irányban történő elmozdulásnak meg-
 felelően.

$$c_1 = \frac{\ell_1^{(j+1)} \ell_2^{(i)} - \ell^{(s-1)}}{k_1^{(j+1)} k_2^{(i)} - k^{(s-1)}}$$

$$c_2 = \frac{\ell_1^{(j)} \ell_2^{(i+1)} - \ell^{(s-1)}}{k_1^{(j)} k_2^{(i+1)} - k^{(s-1)}}$$

6. lépés. Kiválasztásra kerül a képlet a határgörbe új
 pontjának meghatározására, ha

$c_1 > c_2$ - a pont koordinátái $k^{(s)} = k_1^{(j)} k_2^{(i+1)}$,
 $\ell^{(s)} = \ell_1^{(j)} \ell_2^{(i+1)}$, az i index $i=i+1$ és ugrás a 7.
 lépésre,

$c_1 < c_2$ - a pont koordinátái $k^{(s)} = k_1^{(j+1)} k_2^{(i)}$,
 $\ell^{(s)} = \ell_1^{(j+1)} \ell_2^{(i)}$, a j index $j=j+1$ és ugrás a 7. lépésre

7. lépés. Az s számláló növelése $s=s+1$ és annak ellenőrzése, hogy befejeződött-e a határgörbe pontjainak meghatározása, ha

- $s \neq n+m$ - ugrás a 3. lépésre,
- $s = n+m$ - a határgörbe felépítése befejeződött, folytatás a 8. lépésben.

8. lépés. Kivitelre kerülnek a határgörbe $(k^{(s)}, \ell^{(s)})$,
 $s=1, \dots, n+m$ pontjai.

A 3. alapkapsolás határgörbájének kiszámítását végző modul a 32. ábrán látható blokk-vázlat alapján működik.

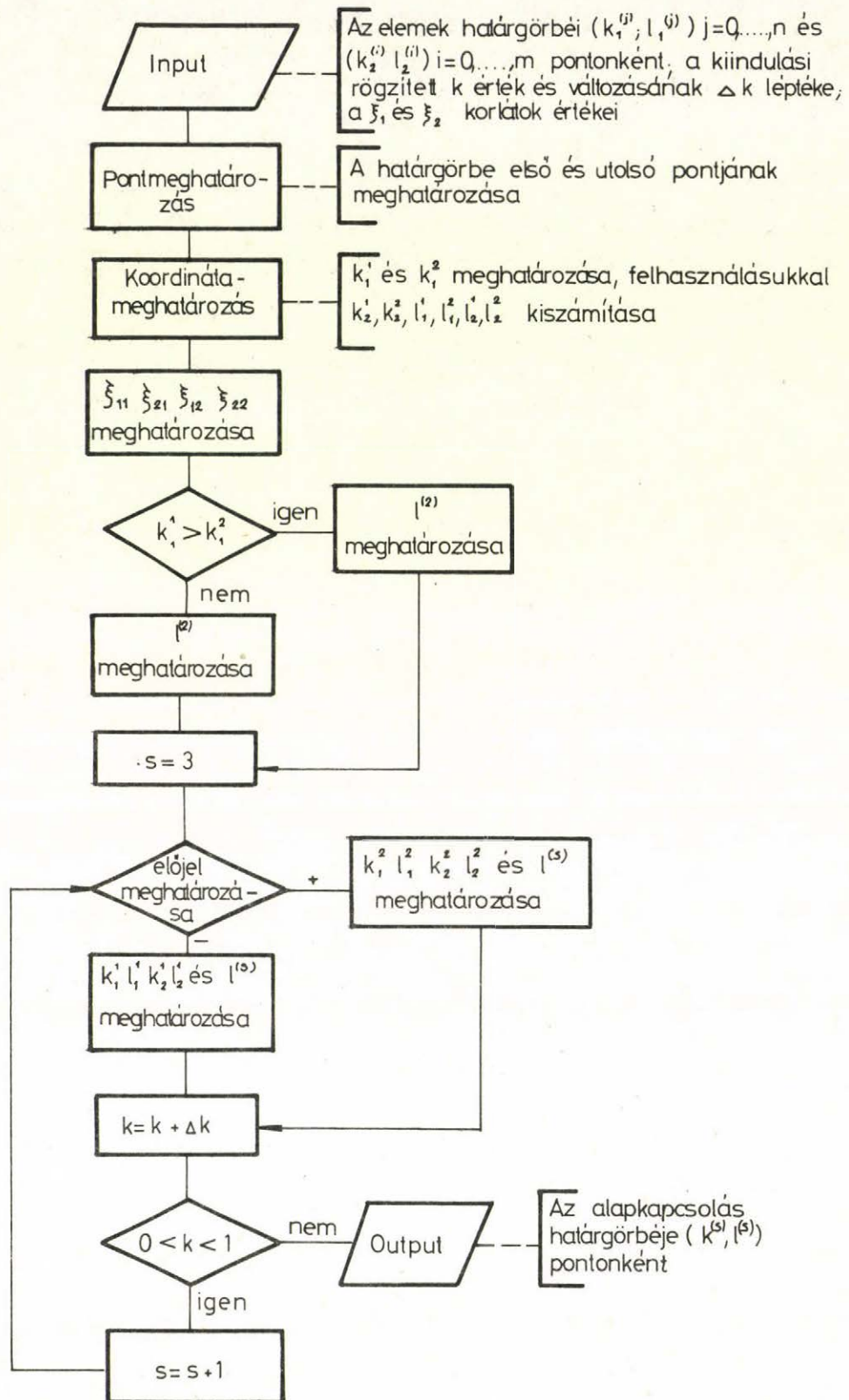
1. lépés. Bevitelre kerülnek

- az elemek határgörbéli pontként, vagyis $(k_1^{(j)}, \ell_1^{(j)})$,
 $j=0, \dots, n$ és $(k_2^{(i)}, \ell_2^{(i)})$, $i=0, \dots, m$,
- a kiindulási rögzített k érték és változtatásának Δk léptéke,
- a ξ_1 és ξ_2 korlátok értékei.

2. lépés. Meghatározásra kerül az alapkapsolás határgörbájének első és utolsó pontja

$$(k^{(1)}, \ell^{(1)}) = (0, 0) \quad , \quad (k^{(N)}, \ell^{(N)}) = (1, 1) \quad \text{ahol}$$

$$N = \left[\frac{1-k}{\Delta k} - \epsilon \right] + 1$$



32. ábra

3. lépés. Meghatározásra kerül k_1^1 a 3.70 egyenlet, illetve k_1^2 a 3.71 egyenlet megoldásával. A kapott értékek felhasználásával kiszámítjuk k_2^1 -t és k_2^2 -t a következő összefüggésből

$$k_2 = \frac{k(1-k_1)}{k_1(1-k)}$$

majd a kapott k_1^1 és k_1^2 értékek felhasználásával ℓ_1^1 -t és ℓ_1^2 -t a $(k_1^{(j)}, \ell_1^{(j)})$, $j=0, \dots, n$ határgörbe alapján. Hasonló módon határozzuk meg ℓ_2^1 -t és ℓ_2^2 -t a kapott k_2^1 és k_2^2 és a $(k_2^{(i)}, \ell_2^{(i)})$, $i=0, \dots, m$ határgörbe alapján.

4. lépés. A ξ_{11} , ξ_{21} , ξ_{12} , ξ_{22} értékek meghatározása a következő értékek felhasználásával.

$$\xi_{11} = \frac{1-k}{1-k_1^1}, \quad \xi_{12} = \xi_1 - \xi_{11}$$

$$\xi_{21} = \frac{k_1^2(1-k)}{1-k_1^2}, \quad \xi_{22} = \xi_2 - \xi_{21}$$

5. lépés. Meghatározásra kerül a határgörbe második pontjának $\ell^{(2)}$ koordinátája a kiindulási k érték mellett, ha

$$k_1^1 > k_1^2 - \ell^{(2)} = \frac{\ell_1^1 \ell_2^1}{1-\ell_1^1 + \ell_1^1 \ell_2^1} \quad \text{és az } s \text{ számláló-}$$

nak $s=3$ értéket adunk,

$$k_1^1 < k_1^2 - \ell^{(2)} = \frac{\ell_1^2 \ell_2^2}{1-\ell_1^2 + \ell_1^2 \ell_2^2} \quad \text{és az } s \text{ számláló-}$$

nak $s=3$ értéket adunk.

6. lépés. Meghatározásra kerül $\text{sign}[(\xi_{11} - \xi_{21}) - (1-k)]$, ha

az előjel negatív - $k_1^1 = \frac{\xi_{11} + k - 1}{\xi_{11}}$,

az előjel pozitív - $k_1^2 = \frac{\xi_{21}}{\xi_{21} + 1 - k}$,

és a k_1^1 -nek megfelelően meghatározzuk $k_2^1 - t$, $\ell_1^1 - t$, $\ell_2^1 - t$,
a k_1^2 felhasználásával pedig a k_2^2 , ℓ_1^2 , ℓ_2^2 értékeket
a 3. lépésben bemutatott módon. Ezt követően kiszámítjuk
a határgörbe pontjának $\ell^{(s)}$ koordinátáját, ha

az előjel negatív - $\ell^{(s)} = \frac{\ell_1^1 \ell_2^1}{1 - \ell_1^1 + \ell_1^1 \ell_2^1}$,

az előjel pozitív - $\ell^{(s)} = \frac{\ell_1^2 \ell_2^2}{1 - \ell_1^2 + \ell_1^2 \ell_2^2}$

7. lépés. Új rögzített k érték képződik $k = k + \Delta k$ és
ellenőrzésre kerül $k \in (0, 1)$ feltétel telejsülése, ha

$k \in (0, 1)$ - az s számláló értéke eggyel növekszik
 $s = s + 1$ és ugrás a 6. lépésre,

$k \notin (0, 1)$ - ugrás a 8. lépésre.

8. lépés. Kivitelre kerülnek a határgörbe $(k^{(s)}, l^{(s)})$, $s=1, \dots, N$ pontjai.

A koordinátarendszerek egymásba való leképezését megvalósító modul a következő átalakítást végzi

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 1-y^{(z)} & , & & y^{(1)} &= 1-x^{(z)} \\ &\vdots & & & \vdots \\ &\vdots & & & \vdots \\ x^{(z)} &= 1-y^{(1)} & , & & y^{(z)} &= 1-x^{(1)} \end{aligned}$$

ahol x szerepét betöltheti k, k_1, k_2 , y szerepét pedig l, l_1, l_2 . A z index $n, m, n+m$ és N értékeket vehet fel.

Az output modul biztosítja az alapkapsolást alkotó elemek határgörbéinek és az alapkapsolás kiszámított határgörbéjének pontonkénti kinyomtatását.

Az $((1 \rightarrow 2) \Rightarrow 3)$ kompozíciós rendszer határgörbéjének 100 pontját határoztuk meg. A 100 pont kiszámításához 4 sec gépidőre volt szükség az ICL 4-70 -es gépen, vagyis megállapítható, hogy az általunk kidolgozott módszer kompozíciós rendszerek határgörbéjének meghatározására lényegesen gyorsabb az előzőekben vizsgált módszerekhez képest. A határgörbe ily módon kiszámított pontjai nagy pontossággal egyeznek azokkal a határgörbe pontokkal, amelyeket a módosított Newton módszer felhasználásával kapunk.

Abban az esetben, ha a kompozíciós rendszer 3. és 4. alapkapsolásokat tartalmaz, próbafuttatást kell végezni a helyes kiindulási rögzített k érték és a Δk lépték megállapítására mindenegybes 3. és 4. alapkapsolás esetére.

7.§. A szétválasztási rendszer optimális üzemmódjának meghatározása

A szétválasztási rendszer optimális üzemmódjának meghatározása céljából ki kell választani a megfelelő optimalizálási kritériumot. Anyagszétválasztási folyamatok esetében a lehetséges kritériumok száma igen nagy [2]. Ez a körülmény részben azzal magyarázható, hogy a szétválasztási folyamatok fő technológiai mutatói olyanok, mint a hasznos komponens kihozatala a koncentrátumba, a koncentrátum minősége és a rendszer teljesítőképessége, egymásra ellentétes hatást gyakorolnak és nehéz kompromisszumot teremteni e mutatók javítását célzó követelmények között. Ezért a gyakorlatban mind a mai napig nincs egy egységesen elfogadott optimalizálási kritérium, minden konkrét esetben egyedi módon veszik fel.

Ebben a munkában nem tüztük ki célul a különböző optimalizálási kritériumok vizsgálatát. Azokat a kritériumokat használtuk fel, amelyeket a [41] munka szerzője javasolt. Ebben a munkában a szerző technológiai kritériumokat vizsgált, melynek eredményeként a következő 4 kritériumot választotta ki, mint legjobban alkalmazható kritériumokat.

1.) Fomenko-féle kritérium:

$$R = \max[k(1-\ell)] \quad 3.80$$

Ez a kritérium egyetlen pontot határoz meg az $\ell = \phi(k)$ hata-
tárgörbén, mégpedig azt, amelyben teljesül a $\max[k(1-\ell)]$.

2.) Sulyozott Fomenko-féle kritérium:

$$R = \max[k^{\lambda_1}(1-\ell)^{\lambda_2}] \quad 3.81$$

A λ_1 és λ_2 súlyozótényezőkkel prioritás állapítható meg azon törekvések között, hogy az x komponensek a koncentrációt bavaló kihozatalát maximalizáljuk-e, vagy az y komponensnek a meddőbe való kihozatalát. Az első kritériumban ezt egyenlő prioritással vettük figyelembe. Ez a kritérium is egyetlen pontot határoz meg az $\ell = \phi(k)$ határgörbén, amelyben $[k^{\lambda_1}(1-\ell)^{\lambda_2}]$ maximális értéket vesz fel adott λ_1 és λ_2 értékek mellett.

3.) Kritérium, amely biztosítja az x komponens koncentrációba való kihozatalának maximumát adott koncentráció mellett:

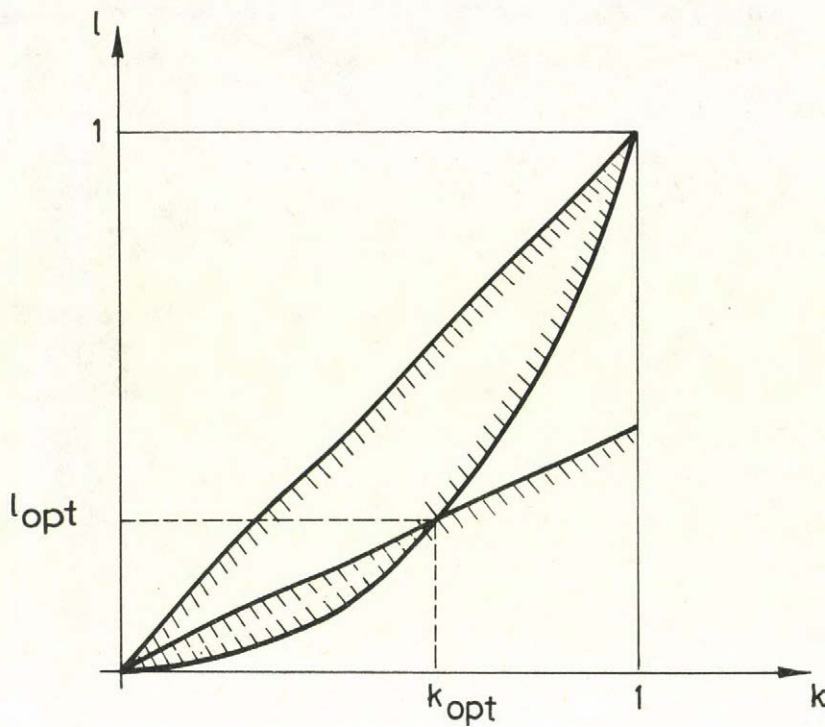
$$R = \max k, \text{ ha } \beta \geq \bar{\beta} \quad 3.82$$

ahol β - az x komponens részaránya a koncentrációban;
 $\bar{\beta}$ - adott β érték.

A [41]-ben bemutatásra került, hogy a $\beta \geq \bar{\beta}$ feltétel a k, ℓ koordinátarendszerben a következő tartománynak felel meg (33. ábra)

$$\ell \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\bar{\beta}}{\bar{\beta}} \cdot k \quad 3.83$$

ahol α - az x komponens részaránya a rendszer bemenetén.



33. ábra.

k maximumát a 3.83 tartományt határoló egyenes és az $l=\phi(k)$ határgörbe metszéspontjában éri el.

4.) Kritérium, amely biztosítja az y komponens meddőbe való kihozatalának maximumát az x komponens adott részaránya mellett a meddőben:

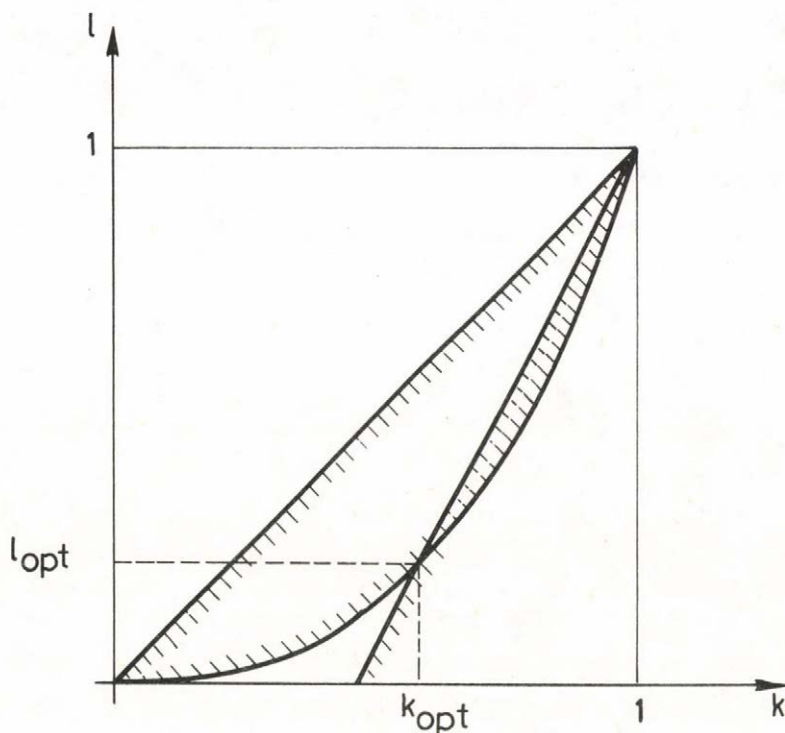
$$R = \max(1-l) \quad , \quad \text{ha} \quad u \leq \bar{u} \quad 3.84$$

adott u - az x komponens részaránya a meddőben;

\bar{u} - adott \bar{u} érték.

Erre az esetre a [41]-ben a szerző kimutatta, hogy $u \leq \bar{u}$ feltétel megfelel a következő tartománynak a k, l síkon (34. ábra)

$$\ell \leq 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\bar{u}}{\bar{u}} (1-k) \quad 3.85$$



34. ábra.

Ebben az esetben az $(1-\ell)$ maximumát a 3.85 tartományt határoló egyenes és az $\ell=\phi(k)$ határgörbe metszéspontjában éri el.

Meg kell jegyezni, hogy a szétválasztási rendszerek határgörbéjének pontjai maguk is megfelelnek a következő kritériumoknak

$\max k$, ha ℓ rögzített az $\ell \in (0,1)$ intervallumban,
vagy
 $\min \ell$, ha k rögzített a $k \in (0,1)$ intervallumban és

ha a cirkulációs áramok felülről korlátozottak. Olyan optimalizálási kritériumok szerint, amelyek a fenti alakúak, vagy olyan alakra hozhatók, az optimális munkapont meghatározása a szétválasztási rendszer határgörbájén nem okoz nehézséget. Alapjában véve a felsorolt 4 kritérium e kritériumoknak egy-egy megnyilvánulási formája.

A [41] munkában a szerző bebizonyította, hogy a rendszer határgörbájének pontjai megfelelnek a rendszert alkotó elemek határgörbéit felépítő pontoknak. E tulajdonságnak megfelelően a kiválasztott kritérium szerint meghatározott munkapontoknak konkrét pontok felelnek meg a rendszert alkotó elemek határgörbájén. E pontok elhelyezkedése az elemek határgörbájén meghatározza az elemek munkapontját, amely egyben biztosítja az egész rendszer optimális üzemeltetését a kiválasztott kritériumnak megfelelően. Az alsó hierarchiai szinten a lokális szabályozási köröket azoknak a munkapontoknak értéktartására kell beállítani, amelyek a felső hierarchiai szinten kerültek meghatározásra az adott elemekre vagy kaszkádokra vonatkozóan.

A felsorolt 4 optimalizálási kritérium szerinti munkapont meghatározási módszert számítógépre vittük és felhasználtuk mind a GRAPH, mind pedig a COMPO programban.

A rendszer munkapontjának meghatározására bármelyikük felhasználható tetszőleges sorrendben. Ebből a célból adat formájában meg kell adni a felhasználásra kerülő kritériumok számát, azok sorszámát (sorszámuk megfelel az ebben a paragrafusban használt felsorolási sorrendjüknek), valamint $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta, \bar{u}$ értékeket a felhasználásra kerülő kritériumnak megfelelően.

A GRAPH program esetében a következő értékek kerülnek ki-nyomtatásra:

- a kritérium sorszáma;
- a rendszer optimális munkapontjának koordinátái (k_{opt}, l_{opt}) ;
- a megfelelő munkapontok a rendszert alkotó elemek határgörbéin - (k_{iopt}, l_{iopt}) , $i=1, \dots, n$.

A COMPO program esetén kinyomtatásra kerülnek a rendszer optimális munkapontjának koordinátái az optimalizálási kritérium kiválasztásának sorrendjében. A rendszert alkotó elemek határgörbéin a munkapontok kiválasztása manuálisan történik az 1. és 2. elem optimális pontjainak listájából, amelyeket az alapkapsolások határgörbéinek meghatározásakor kapunk. Az elemek határgörbéin a munkapontok meghatározása a zárójelek felbontásával ellentétes sorrendben történik.

A kritériumok szerinti munkapont meghatározást végző programmodul olyan felépítésű, hogy lehetővé teszi a választható kritériumok számának növelését új kritériumok bevezetésével.

IV. AZ EREDMÉNYEK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI A GYAKORLATBAN

Anyagszétválasztási folyamatokkal gyakran találkozhatunk a vegyipar és bányászati ipar számos területén. Jelenleg egyre több területen merül fel automatizált irányítási rendszerek létrehozásának szükségessége, többek között, az anyagszétválasztási folyamatokban is. Az egész világon megfigyelhető egy ilyen tendencia. A szükséges mérő és szabályozási eszközök megjelenésével, a számítástechnika felhasználásával az anyagszétválasztási folyamatok automatizált irányítási rendszereinek létrehozása reális törekvésé vált. Meg kell jegyezni azonban, hogy még jelenleg is nehézségek vannak a folytonosan működő mérőeszközök kialakítása területén, valamint olyan mérő és szabályozóberendezések kidolgozásakor, melyek agresszív közegekben üzemelnek. Ezek a nehézségek még fékezik a szétválasztási folyamatokban az automatizált irányítási rendszerek széleskörű elterjedését. Szétválasztási folyamatok automatizált irányítási rendszereinek kialakításakor a második, nem kevésbé fontos tényező a software létrehozása. Ezen a területen két irányzat különíthető el: algoritmusok kidolgozása konkrét szétválasztási folyamatok irányítására, vagy egy általános megközelítés, amely a szétválasztási folyamatok szélesebb skáláját fogja át. Jelen dolgozatban a második utat választottuk, vagyis az általunk kidolgozott algoritmusok különböző anyagszétválasztási folyamatokban használhatók fel, amennyiben azok nagyszámu azonos típusu szétválasztó elemből épülnek fel, melyekben kétkomponensű elegyek szétválasztása történik. A kidolgozott algoritmusok alkalmazhatók nem azonos típusu szétválasztó elemek esetén is, ha azokban olyan elegyek szétválasztása megy végbe, melyek komponensei a szétválasztás folyamán nem változnak. Ugyanigy lehetőség van az algoritmusok felhasználására többkomponensű elegyek szétválasztásakor is, ha azok időben két-két komponens szétválasztásaként játszódnak le.

A gyakorlatban előforduló és a felsorolt tulajdonságokkal rendelkező szétválasztási folyamatok közül leginkább a flotációs, rektifikációs és vztisztítási folyamatok emelhetők ki. Munkánk során a legtöbb figyelmet a flotációs folyamatoknak szenteltük. A flotáció a színesfém ércek dusicításának legfontosabb módszere és gyakran kerül felhasználásra foszforitok, sók és kőszén dusicítására. A világ nyersanyagkészletei idővel kimerülnek. Ezért a nyersanyagok maximális kinyerésére való törekvés teljesen megalapozott és jelenleg döntő fontossága. Az értékes komponens kihozatalának növelése a végtermékbe adja a probléma megoldását. Mint ismeretes, a kihozatal növelése járulékos költségek felmerülését okozza. A flotációs folyamatok automatizált irányítási rendszerével olyan üzemmódot kell kialakítani, amely kompromisszumhoz vezet ezekben az ellentétes törekvésekben. A kompromisszumot hatékonysági kritérium alakjában fogalmazzuk meg. Azt az üzemmódot, amely kompromisszumot biztosít optimálisnak nevezzük a kiválasztott hatékonysági kritérium szerint. A vállalatok automatizált irányítási rendszer nélkül nem dolgoznak optimális üzemmódban. Ezért az automatizált irányítási rendszerek bevezetése flotációs folyamatokba jelentős gazdasági hatékonysággal jár. Az általunk kidolgozott algoritmusok lehetővé teszik az optimális üzemmód meghatározását 4 hatékonysági kritérium alapján. Ezenkívül lehetőség van a kritériumok számának további bővítésére.

Másrészt a gyakorlatban felhasználásra kerülő dusicítási rendszerek sokévi tapasztalat felgyülemelésével jöttek létre. Arról, hogy a jelenleg alkalmazott rendszerek nem a legjobbak, tanuskodik az a korszerűsítési munka, amely állandóan folyik a rendszer javítása érdekében. Ezért aktuális minden olyan munka, amely a szétválasztási rendszerek tervezésének automatizálására irányul. Az általunk kidolgozott számítógépes tervezési módszer lehetővé teszi a legjobb szétválasztási rendszer kiválasztását a megengedett rendszerek halmazából.

A legjobb rendszer kiválasztására kidolgozott eljárás lehetővé teszi már működő rendszerek tervezett változtatási variánsainak előzetes kiszámítását és elemzését is. Ezzel a tervezett variánsok közül kiválasztható a legjobb és összehasonlítható a működő rendszerrel.

Összegezve az elmondottakat, a legjobb szétválasztási rendszer kiválasztására és optimális üzemmódjának meghatározására kidolgozott egységes módszer kétkomponensű (vagy bizonyos többkomponensű) elegyek szétválasztásakor több azonos típusu (vagy bizonyos különböző típusu) szétválasztó elem-ből álló szétválasztási rendszer felhasználásával a következő problémák megoldását teszi lehetővé:

- a legjobb szétválasztási rendszer kiválasztását a megengedett rendszerek halmazából és optimális üzemmódjának meghatározását a kiválasztott optimalizálási kritériumnak megfelelően;
- már működő szétválasztási rendszer optimális üzemmódjának meghatározását a kiválasztott kritériumnak megfelelően;
- a működő rendszer, vagy részrendszer tervezett változtatási variánsainak kiszámítását, a kapott eredmények összehasonlítását a legjobb variáns kiválasztása céljából.

Jelen dolgozatban egy univerzális módszert dolgoztunk ki anyagszétválasztási rendszerek automatizált tervezésére és optimális irányítására, amely a szétválasztási folyamatok széles skálájára alkalmazható. A konkrét szétválasztási folyamatok egy sor olyan sajátossággal rendelkeznek, amelyeket feltétlenül figyelembe kell venni az általunk javasolt univerzális módszer felhasználásakor. Még abban az esetben is, ha módszerünket a folyamatok szűkebb osztályára-flotációs folyamatokra alkalmazzuk, figyelembe kell venni néhány további sajátosságot, amelyek eltérnek egymástól a nyersanyagtól függően - a sók, kőszén, vagy a szines-

fémek flotálása több szempontból eltér egymástól. Ezenkívül különbözők lehetnek a szétválasztó berendezések, számuk a rendszerben, összekapcsolási elveik, az optimalizálási kritériumok az optimális üzemmód meghatározásakor stb.

Módszerünk egyik alkalmazási példaként a "Beloruszkálium" trösztöt említjük meg, ahol kálium tartalmu ércek dusicálásával foglalkoznak. A Szovjetunió vegyipari és műszeripari miniszterének № 589/225. 1.IX.1972. számú "Automatizált irányítási rendszerek bevezetéséről az "Uralkálium" és "Beloruszkálium" trösztöknél" című közös utasítása értelmében a "Beloruszkálium" trösztnél az első ütemben kidolgozásra és elfogadásra került a "Flotációs folyamat irányítása" c. kivitelezési terv. E kivitelezési terv alapját az általunk kapott eredmények képezik. Jelenleg a második ütem kidolgozása folyik, amely kiterjed az őrlési, iszaptalanítási és flotációs folyamatok együttes irányítására a "Beloruszkálium" tröszt első üzemegységében. Például a feladat megoldásakor a következő sajátosságokkal kell számolni.

- le kell írni az őrlési és iszaptalanítási folyamatokat adott határgörbéjű szétválasztó elemek össz kapcsolásaként;
- nyolc párhuzamos termelővonalat kell figyelembe venni és meg kell határozni a legjobb anyagelosztást az egyes vonalak között;
- figyelembe kell venni a vészhelyzeteket - egy vagy néhány termelővonal kiesését a nyolc vonal közül - és biztosítani kell ilyen esetekben a belépő nyersanyag újraelosztását;
- saját hatékonysági kritériumot kell alkalmazni, amely a kálisó kihozatal maximumát biztosítja adott koncentrációs minőség és éves gyártásvolumen esetén, teljesítve a reagensek adagolására előírt normákat.

Az általunk kidolgozott univerzális módszer felhasználásával és a felsorolt sajátosságok figyelembevételével jelenleg a Belorusz Technológiai Intézet és a "Beloruszkálium" Információs és számítóközpontjának munkatársai foglalkoznak az "Őrlési, iszaptalanítási és flotációs folyamatok irányítása" c. műszaki terv kidolgozásával.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Асташкин В.В., Бобров Д.А., Иванов В.А., Игнатов В.Н., Кафаров В.В., Мешалкин В.П., Перов В.Л. : Автоматизированный комплекс для моделирования и оптимизации химико-технологических систем.
Автоматика и телемеханика, № 11, 1974.
- [2] Барский Л.А., Плаксин И.Н. : Критерии оптимизации разделительных процессов.
Изд-во "Наука", Москва, 1967.
- [3] Барский Л.А., Рубинштейн Ю.Б. : Кибернетические методы в обогащении полезных ископаемых.
Изд-во "Недра", Москва, 1970.
- [4] Барский Л.А., Машевский Г.Н., Штабов Ю.В., Иванкин В.П. : Вопросы отыскания алгоритмов управления флотационным процессом.
Международная конференция по автоматизации в горной промышленности /ISAMC/, Венгрия, 1971.
- [5] Басакер Р., Саати Т. : Конечные графы и сети.
Изд-во "Наука", Москва, 1974.
- [6] Бобров Д.А., Иванов В.А., Кафаров В.В., Перов В.А. : Алгоритм декомпозиции химико-технологических систем при решении задач оптимизации.
Автоматика и телемеханика, № 1, 1973.
- [7] Вешкёви И. : Некоторые методы оптимизации класса схем соединения элементов разделительных установок.
Доклады III. Национальной конференции - Автоматизация' 76, Болгария, 1976.
- [8] Гандельсман П.И. : Исследование и разработка автоматизированной системы оперативного управления основными технологическими процессами углеобогажительных фабрик.
Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н., Ленинград, 1973.

- [9] Голосов О.В., Лебедкин В.Ф., Махлин И.С. : Математическая модель анализатора технологических ситуаций для выбора оптимальных режимов установок для разделения смесей.
Известия АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1963.
- [10] Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. : Геометрическое программирование.
Изд-во "Мир", Москва, 1972.
- [11] Диниц Е.А., Зайцев М.А. : О генерации помеченных деревьев и разделительных сетей.
Сб. "Алгоритмические методы в комбинаторике. Изд-во "Наука", Москва, 1978.
- [12] Диниц Е.А., Зайцев М.А. : Линейное упорядочение и порождение деревьев.
Сб. "Алгоритмические методы в комбинаторике". Изд-во "Наука", Москва, 1978.
- [13] Диниц Е.А., Зайцев М.А. : Алгоритмы генерации неизоморфных деревьев.
Автоматика и телемеханика, № 4, 1977.
- [14] Дудников Е.Е., Цодиков Ю.М. : Оперативное управление производством непрерывного типа.
Автоматика и телемеханика, № 4, 1973.
- [15] Жаворонков Н.М., Кафаров В.В., Перов В.Л., Мешалкин В.П. : Новые принципы анализа и синтеза химико-технологических систем.
Теоретические основы химической технологии, т. 4, № 2, 1970.
- [16] Зангвилл У.И. : Нелинейное программирование.
Изд-во "Советское радио", Москва, 1973.
- [17] Кафаров В.В., Перов В.Л., Мешалкин В.П. : Применение топологических методов к решению задач проектирования и эксплуатации сложной химико-технологической системы.
Техническая кибернетика, вып. 13, Изд-во АН УССР Киев, 1970.

- [18] Кафаров В.В., Мешалкин В.П., Перов В.Л.: Алгоритм анализа многоконтурной химико-технологической системы. Автоматика и телемеханика, № 11, 1971.
- [19] Кафаров В.В., Перов В.Л., Иванов В.А., Бобров Д.А. : Расчет на ЦВМ и оптимизация химико-технологических систем большой размерности с произвольной структурой. Теоретические основы химической технологии, т. 6., № 1, 1972.
- [20] Кафаров В.В., Перов В.Л., Иванов В.А., Бобров Д.А. : Системный подход к оптимальному проектированию химико-технологических систем. Теоретические основы химической технологии, т. 6., № 6, 1972.
- [21] Кичатов Ю.Ф., Товстуха Т.И., Томингас К.В.: Двухуровневая система управления процессом флотации. Международная конференция по автоматизации в горной промышленности /ИСАМС/, Венгрия, 1971.
- [22] Кнут Д.: Искусство программирования для ЭВМ. Том 1, Основные алгоритмы. Изд-во "Мир", Москва, 1976.
- [23] Кобринец В.П.: Статистическое исследование и оптимизация процесса флотации калийных руд. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н., Москва, 1974.
- [24] Козин В.З.: Разработка и исследование эффективных методов идентификации и принципов управления процессами обогащения руд и углей. Автореферат диссертации на соискание ученой степени д.т.н., Свердловск, 1971.
- [25] Козин В.З., Блинов Е.Е., Ефремов В.Н., Комаров А.Я. : Анкетный метод получения уравнений связи процесса флотации. Известия вуз, Горный журнал, № 7, 1969.

- [26] Козина Р.М.: Исследование структуры и разработка методов расчета технологических схем флотации.
Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н., Свердловск, 1975.
- [27] Кузьмин Н.И.: Исследование технологического процесса и разработка алгоритмов управления калийной флотационной фабрикой.
Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н., Ленинград, 1975.
- [28] Лукомский Я.И.: Теория корреляции и ее применение к анализу производства.
Госстатиздат, Москва, 1961.
- [29] Мееров М.В.: Проблема оптимизации сложных систем в условиях большой размерности.
Автоматика и телемеханика, № 4, 1975.
- [30] Налимов В.В.: Статистические методы описания химических и металлургических процессов.
Металлургиздат, Москва, 1963.
- [31] Налимов В.В.: Теория эксперимента.
Изд-во "Наука", Москва, 1971.
- [32] Налимов В.В., Чернова Н.А.: Статистические методы планирования экстремальных экспериментов.
Изд-во "Наука", Москва, 1965.
- [33] Околович А.М., Фигуркова Л.И., Власов Ю.С.: Исследование автоматической оптимизации реагентного режима в промышленной флотации.
Международная конференция по автоматизации в горной промышленности /ИСАМС/, Венгрия, 1971.
- [34] Перов В.Л., Бобров Д.А., Иванов В.А., Кафаров В.В., Пухтин В.М.: Определение оптимальных режимов работы промышленной системы двухступенчатой очистки газов.
Химическая промышленность, № 1, 1973.

- [35] Персиц В.З.: Разработка и исследование методов анализа и синтеза технологических схем обогащения угля. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н., Москва, 1975.
- [36] Плаксин И.Н., Барский Л.А., Зайденберг И.Ш., Австрих Г.А.: Некоторые вопросы применения общей теории разделения к расчету и оптимальному управлению флотационными установками. Сб. "Современное состояние и задачи селективной флотации руд", Изд-во "Наука", Москва, 1967.
- [37] Планирование эксперимента. Сб. докладов под редакцией Г.К. Круг, Изд-во "Недра", Москва, 1966.
- [38] Поволоцкий В.С.: Разработка поискового алгоритма статической оптимизации процесса флотации. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н., Свердловск, 1974.
- [39] Рейзлин А.С.: Исследование и оптимизация промышленного процесса флотации руд с применением статистических методов планирования экстремальных экспериментов. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н., Москва, 1974.
- [40] Риордан Дж.: Введение в комбинаторный анализ. Изд-во "Иностранной литературы", Москва, 1963.
- [41] Томингас К.В.: Согласование целей при оптимизации раздельных процессов. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н., Москва, 1973.
- [42] Тютюнник А.И.: Разработка и исследование оптимальных алгоритмов управления объектами обогащательной технологии. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н., Харьков, 1973.
- [43] Фиакко А.В., Мак-Кормик Г.П.: Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. Изд-во "Мир", Москва, 1972.

- [44] Харари Ф.: Теория графов.
Изд-во "Мир", Москва, 1973.
- [45] Харари Ф., Палмер Э.: Перечисление графов.
Изд-во "Мир", Москва, 1977.
- [46] Химмельблау Д.М.: Прикладное нелинейное программирование.
Изд-во "Мир", Москва, 1975.
- [47] Холл М.: Комбинаторика.
Изд-во "Мир", Москва, 1970.
- [48] Avriel M., Williams A.C. Complementary Geometric Programming. SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.19, N^o1, 1970.
- [49] Avriel M., Dembo R., Passy U. Solution of Generalized Geometric Programs. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.9, 1975.
- [50] Duffin R.J., Peterson E.L. Reversed Geometric Programs Treated by Harmonic Means. Indiana University Mathematics Journal, Vol.22, N^o6, 1972.
- [51] Duffin R.J., Peterson E.L. Geometric Programming with Signomials. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.11, N^o1, 1973.
- [52] Passy U., Wilde D.J. Generalized Polynomial Optimization. SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.15, N^o5, 1967.
- [53] Read R.C. The Coding of Various Kinds of Unlabeled Trees. Graph Theory and Computing, edited by Read R.C. Academic press, New York and London, 1972.
- [54] Vaskövi István: Flotációs folyamatok kétszintes hierarchikus irányításának néhány kérdése.
Előadás a VIII. Magyar Automatizálási Konferencián, Budapest, 1976.

- [55] Vaskövi I., Galbavy M., On Determining the Extreme Characteristic of Mixture Separating Facilities.
Проблемы управления и теории информации, № 4, 1977.
- [56] Vaskövi I., Galbavy M., Kichatov Yu. Some Results on the Mathematical Theory of Binary Mixtures Separation.
IX. International Symposium on Mathematical Programming, Budapest, 1976.

A TANULMANYOK sorozatban eddig megjelentek:

- 1/1973 Pásztor Katalin: Módszerek Boole-függvények minimális vagy nem redundáns, $\{\wedge, \vee, \neg\}$ vagy $\{\text{NAND}\}$ bázisbeli, zárójeles vagy zárójel nélküli formuláinak előállítására
- 2/1973 Башкеви Иштван: Расчленение многосвязных промышленных процессов с помощью вычислительных машин
- 3/1973 Ádám György: A számítógépipar helyzete 1972 második felében
- 4/1973 Bányász Csilla: Identification in the Presence of Drift
- 5/1973* Gyürki J. - Laufer J. - Girnt M. - Somló J.:
Optimalizáció adaptív szerszámgépirányítási rendszerek
- 6/1973 Szelke E. - Tóth K.: Felhasználói Kézikönyv /USER MANUAL/ a Folytonos Rendszerek Szimulációjára készült ANDISIM programnyelvhez
- 7/1973 Legendi Tamás: A CHANGE nyelv/multiprocesszor
- 8/1973 Klafszyk Emil: Geometriai programozás és néhány alkalmazása
- 9/1973 R. Narasimhan: Picture Processing Using Pax
- 10/1973 Dibuz Á. - Gáspár J. - Várszegi S.: MANU-WRAP hátlap-huzalozó, MSI-TESTER integrált áramköröket mérő, TESTOMAT-C logikai hálózatokat vizsgáló berendezések ismertetése
- 11/1973 Matolcsi Tamás: Az optimum-számítás egy új módszeréről
- 12/1973 Makroprocesszorok, programozási nyelvek. Cikkgyűjtemény az NJSzT és SZTAKI közös kiadásában.
Szerkesztette: Legendi Tamás

- 13/1973 Jedlovsky Pál: Új módszer bonyolult rektifikáló oszlopok vegyészmérnöki számítására
- 14/1973 Bakó András: MTA kutatóintézeteinek bérszámfejtése számítógéppel
- 15/1973 Ádám György: Kelet-nyugati kapcsolatok a számítógépiparban
- 16/1973 Fidrich I.-Uzsoky M.: LIDI-72 listakezelő rendszer a Digitális Osztályon, 1972. évi változat
- 17/1974 Gyürki József: Adaptív termelésprogramozó rendszer /APS/ termelőműhelyek irányítására
- 18/1974 Pikler Gyula: MINI-számítógépes interaktív alkatrészprogramíró rendszer NC szerszámgépek automatikus programozásához
- 19/1974 Gertler J. - Sedlak J.: Software for process control
- 20/1974 Vámos T. - Vassy Z.: Industrial Pattern Recognition Experiment - A Syntax Aided Approach
- 21/1974 A KGST I.-15-1.: "Diszkrét rendszerek automatikus vezérlése" c. témában 1973. februárban rendezett szeminárium előadásai
- 22/1974 Arató M. - Benczur A. - Krámlí A. - Pergel J.: Stochastic Processes, Part I.
- 23/1974 Benkó S. - Renner G.: Erősen telített mágneses körök számítógépes tervezési módszere

- 24/1974 Kovács György - Franta Lászlóné: Programcsomag elektronikus berendezések hátlaphuzalozásának tervezésére
- 25/1974 Járdán R. Kálmán: Háromfázisú tirisztoros inverterek állandósult tranziens jelenségei és belső impedanciája
- 26/1974 Gergely József: Numerikus módszerek sparse mátrixokra
- 27/1974 Somló János: Analitikus optimalizálás
- 28/1974 Vámos Tibor: Tárgyfelismerési kísérlet nyelvi módszerekkel
- 29/1974 Móricz Péter: Vegyészmérnöki számítási módszerek fázisegyensúlyok és kémiai egyensúlyok vizsgálatára
- 30/1974 Vassy Z. - Vámos T.: The Budapest Robot - Pragmatic Intelligence
- 31/1975 Nagy István: Frekvenciaosztásos középfrekvenciás inverterek elmélete
- 32/1975 Singer D. - Borossay Gy. - Koltai T.: Gázhálózatok optimális irányítása különös tekintettel a Fővárosi Gázművek hálózataira
- 33/1975 Vámos T. - Vassy Z.: Limited and Pragmatic Robot Intelligence
Mérő L. - Vassy Z.: A Simplified and Fastened Version of the Hueckel Operator for Finding Optimal Edges in Pictures
- Галло В.: Программа для распознавания геометрических образов, основанная на лингвистическом методе описания и анализа геометрических структур

- 34/1975 László Nemes: Pattern Identification Method for Industrial Robots by Extracting the Main Features of Objects
- 35/1975 Garádi - Kármli - Ratkó - Ruda: Statisztikai és számítástechnikai módszerek alkalmazása kórházi morbiditás vizsgálatokban
- 36/1975 Renner Gábor: Elektromágneses tér számítása nagyhőmérsékletű anyagban
- 37/1975 Edgardo Felipe: Specification problems of a process control display
- 38/1975 Hajnal Andrásné: Nemlineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei
- 39/1975* A.Abd El-Sattar: Control of induction motor by three phase thyristor connections in the secondary circuit
- 40/1975 Gerhardt Géza: QDP Grafikus interaktív szubrutinok a CDC 3300-GD'71 grafikus konfigurációra
- 41/1975 Arató M. - Benczur A. - Krámlí A. - Pergel J.: Stochastic Processes, Part II.
- 42/1975 Arató Mátyás: Fejeztek a matematikai statisztikából számítógépes alkalmazásokkal
- 43/1975 Matavovszky Tibor - dr Pásztorné Varga Katalin: Programrendszer Boole-függvényrendszer együttes egyszerűsítésére vagy minimalizálására

- 44/1975 Bacsó Nándorné: Pneumatikus áramköri hazardok
- 45/1975 Varga András: Ellenpárhuzamos félvezetőpárokkal vezérelt aszinkronmotoros hajtások számítási módszerei
- 46/1976 Galántai Aurél: Egylépéses módszerek lokális hibabecslései
- 47/1976 Abaffy József: A feltétel nélküli függvényminimalizálás kvadratikus befejezésű módszerei
- 48/1976 Strehó Mária: Stiff típusú közönséges differenciálegyenletek megoldásáról
- 49/1976 Gerencsér László: Nemlineáris programozási feladatok megoldása szekvenciális módszerekkel
- 50/1976 Treer Róbert: A syntax macro definition language
- 51/1976 Bakó András: TIMER időredukciós programcsomag
- 52/1976 W.A. Potas: Computer Aided Design
- 53/1976 Farkas Ernő: MP Φ .2 makroprocesszor általános ismertetése
- 54/1976 N.N. Puri: Multi Element Fault Isolation in Electronic Circuits
- 55/1976 Edgardo Felipe: The Design of color, Raster-Scan graphical displays for process control applications
- 56/1976 Bán Ilona: Iterációs módszerek lineáris rendszerekre
- 57/1976 Kovács Mihály: Egységes kisszámítógépes gépgyártástechnológiai tervezőrendszer vázlatos rendszerterve különös tekintettel a monitor rendszerre.

- 58/1976 Varga Gyula: Mátrixok általánosított inverze
- 59/1976 Szép Endre: Membrános diszkrét elemrendszerek fajlagos logikai kapacitása
- 60/1976 Malcolm Arthur Sabin: The use of piecewise forms for the numerical representation of shape
- 61/1976 Lehel Csaba - Almási László - Lehel Jenő:
Pascal P. portábilis compiler implementálási utmutató
- 62/1977 S.A. Coons: Geometry and Algebra Some Papers
- 63/1977 Dokladü Szeminara RIGA - Cikkgyűjtemény
- 64/1977 Győry Gy. - Halász F. - Szilléry A. - Tóth B.:
A PSL/PSA rendszer használata az információs rendszerek tervezésében és dokumentálásában
- 65/1977 Gertler J. - Bakonyi P. - Szentgyörgyi Zs. - Orbán L
Az ESZR és MSZR berendezésekkel szemben támasztott hardware és software követelmények az AMT szempontjából
- 66/1977 Lipcsey Zsolt: N-személyes minőségi differenciáljátékok késleltetéssel és késleltetés nélkül
- 67/1977 Gyürki József: Az ANSI/X3/SPARC bizottság modellje adatábzis kezelő rendszerekre
- 68/1977 Gyárfás András: A PL360 programozási nyelv
- 69/1977 Téli iskola - Visegrád,

- 70/1977 Krámlí A. - Ratkó I. - Ruda M. - Soltész J.:
A statisztikai adatfeldolgozás matematikai és számítástechnikai problémái
- 71/1977 Gyárfás András: Partíciófedések és lefoghalmazok
hipergráfokban - Kandidátusi értekezés -
- 72/1977 Pham Thuong Cat: Modell-referenciás adaptív rendszerek tervezésének néhány problémája
- Kandidátusi értekezés -
- 73/1978 S.A. Coons: Homogeneous coordinates, projective transformations and conics - Tutorial -
- 74/1978 Vorträge über das graphische Display GD'71

* A *-gal jelölt kivételével a sorozat kötetei megrendelhetők az Intézet könyvtáránál /Budapest, XIII. Victor Hugo u. 18-22/

